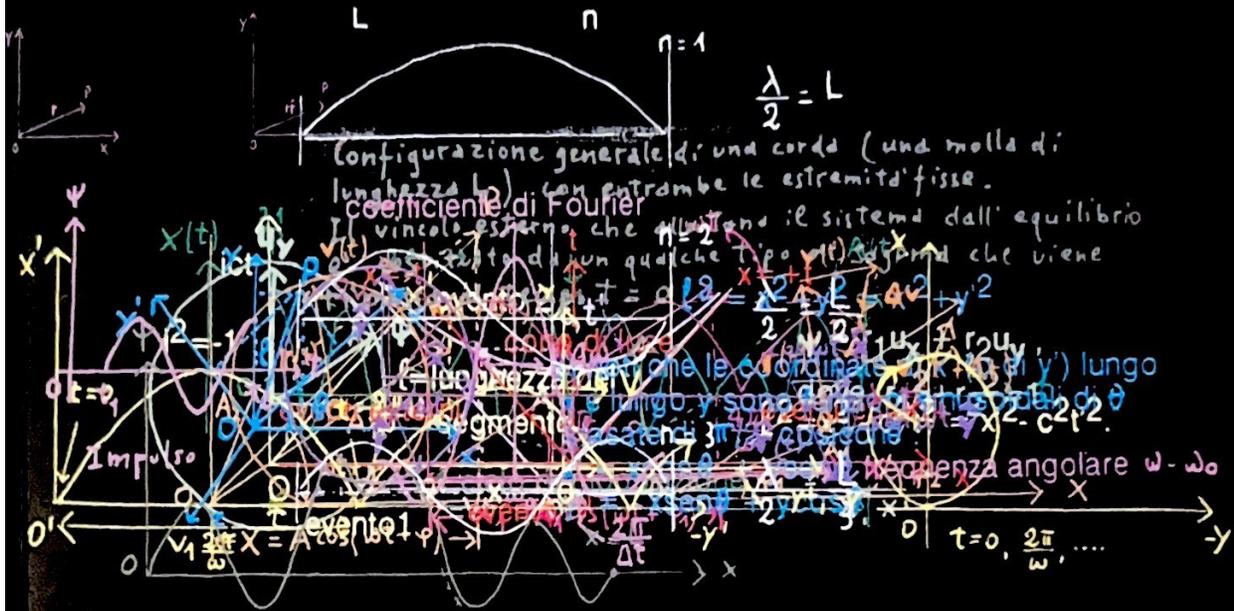
PROCESSO ALLA FISICA

DARIO VACCARI

SUPERNOVA

Premessa

Il trionfo della meccanica all'epoca della rivoluzione scientifica, nel diciassettesimo secolo, ha prodotto lo sviluppo di una concezione della fisica, e in generale della scienza, che mal si adattava allo studio dei sistemi viventi. In accordo con la legge newtoniana del moto, la fisica si attestò su posizioni di difesa di una forma estrema di determinismo. Non fu possibile, per lungo tempo, riformare la teoria della scienza in modo tale da comprendere le discipline biologiche, interessate alla descrizione di sistemi che posseggono una straordinaria varietà di comportamenti, difficilmente ripetibili e decifrabili completamente solo alla luce della storia naturale (anche se non appare importante, finché ci si limiti alla fisiologia, fornire una descrizione più completa fondata sul concetto della selezione biologica).
Verso la fine dell' Ottocento, risulterà chiaro che la fisica matematica non è in grado di risolvere esattamente il problema del moto di neppure una particella soggetta alle forze d'attrazione anche solo di poche altre. Il controllo di sistemi complessi a molte particelle verrà raggiunto mediante lo sviluppo di argomentazioni probabilistiche. Sembrerebbe così ridotta la frattura logica fra il mondo della fisica e il mondo della vita.
Invero, il calcolo delle probabilità, nelle sue applicazioni in fisica classica da una parte e in biologia evolutiva dall'altra, porta a conclusioni diametralmente divergenti. È ben noto che un sistema a molte particelle non è mai immune da fluttuazioni spontanee nelle variabili macroscopiche (pressione, temperatura, eccetera), dovute a moto termico e alle interazioni delle molecole. Su queste variazioni locali, generalmente piccole e fugaci, ogni tentativo di controllo diventa disperatamente complesso. Per conseguenza il fisico utilizza un metodo statistico appropriato per ottenere il valore medio, il valore di riferimento, il valore tipico.
In biologia non esistono individui "tipici". I valori medi calcolati per campioni sono unicamente astrazioni. La variazione in quanto tale ha invece una realtà e rappresenta l'aspetto veramente significativo delle popolazioni.
Due modelli concettuali non potrebbero essere più differenti l'uno dall'altro di quanto lo siano quelli utilizzati dalla meccanica e dalla biologia evolutiva.
È possibile oggi far notare che la meccanica, nata con lo scopo di eliminare l'indeterminazione riscontrata in numerose situazioni di corpi in movimento, non ha raggiunto, in linea di principio e con riferimento all'evoluzione di una particella singola, il suo obiettivo.

Ciò porta la fisica a riconsiderare i problemi da una prospettiva a misura d'uomo. Trasformata dall'idea che le sole leggi che si possono validamente inferire dalle osservazioni sono leggi statistiche, la fisica sta ora avanzando su un ampio fronte, incontrando e annettendo ai suoi domini una quantità di nuovi sistemi.
Impossibile escludere ancora, dalla cultura medico- biologica, una tale disciplina.
Ringrazio il dott. Luciano Buggio, insegnante unico della Scuola di Fisica "G. Bruno", il quale, con le sue eresie, mi ha dimostrato che anche la meccanica è divertente. Fino ad allora, come medico attento alla biofisica, avevo limitato i miei interessi al ramo statistico della fisica, più precisamente alla termodinamica, che di recente è stata arricchita dalla portentosa teoria dei sistemi lontano dall'equilibrio elaborata dalla scuola di Prigogine.
Qui tratterò solo di meccanica, cercando, mediante l'uso di una matematica alla portata di uno studente liceale, di coglierne i lineamenti essenziali.
Verrà segnalata la rottura, ascrivibile in gran parte a un diverso concetto di "stato", operata dalla teoria dei quanti rispetto alla tradizione classica.
Scrive memorabilmente J.L.Borges: "Classico non è un libro che necessariamente possiede questi o quegli altri meriti; è un libro che le generazioni degli uomini, spinte da diverse ragioni, leggono con previo fervore e con una misteriosa lealtà".
Il prezzo pagato dalla rivoluzione quantistica della fisica sarà dunque alto, ma infine consentirà la ricostituzione di una visione unitaria con la biologia nella descrizione scientifica del mondo.

D.V.

La meccanica descrive e correla misure che sono indipendenti dalla struttura particolareggiata dei corpi reali. Per questo motivo i corpi reali vengono indicati con il nome asettico di *particelle*.

La relazione tra fisica e matematica è stretta, così stretta che in effetti tendiamo a dimenticarci che lo spazio matematico, in cui ha luogo la rappresentazione della fisica, è solo un modello dello spazio fisico, qualunque cosa s'intenda con tale termine. Il modello di spazio è fornito dalla geometria euclidea, che non è una scienza sperimentale sottoposta ad una continua revisione. Lo spazio euclideo viene definito isotropo, omogeneo, illimitato e infinito (nel senso della distinzione di Riemann, giacché un cerchio massimo sulla superficie di una sfera, cioè un cerchio il cui centro sia anche il centro della sfera, non ha un limite ma è finito), di curvatura nulla, tridimensionale.

Il tempo che si misura è effettivamente una durata, ma concepita come una dimensione spazializzata: è l'intervallo di tempo che passa tra un'origine, l'inizio del processo, e un punto estremo, l'istante corrente che si considera. Coerentemente con un tale punto di vista si ritiene che un dato processo naturale, per esempio la caduta di un grave, sia invariante rispetto a ripetizioni o spostamenti nel tempo, e che perciò il tempo in cui l'esperimento è stato eseguito sia irrilevante. In altri termini, le leggi della meccanica sono astratte e essenzialmente astoriche, anche se in esse compare la variabile tempo.

Infine, tutta la struttura matematica della meccanica riposa sulla nozione di distanza e di durata *infinitesime*, e quindi sulla supposta validità dei concetti di continuo e di numero reale (che comprende i numeri razionali e irrazionali, cioè riducibili e rispettivamente non riducibili a frazione).

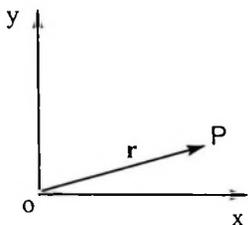
A fondamento del calcolo infinitesimale è il concetto di limite. Si parte da una suddivisione finita, e in relazione a essa si fa un calcolo approssimato.

L'approssimazione diviene esattezza quando il numero delle parti tende all'infinito, diventando ciascuna parte evanescente, infinitamente piccola, infinitesima.

Il fisico dalla mentalità classica è convinto che tutto il sistema geometrico da lui appreso durante l'infanzia non sia soltanto uno schema formale, e per di più solo uno dei molti possibili, bensì una struttura vitalmente realizzata nel mondo fisico e inoltre, non solo realmente esistente, ma anche osserva-

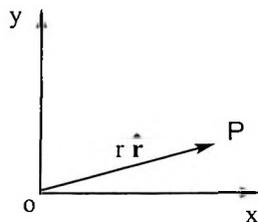
bile senza porre un limite alla precisione con cui possono essere effettuate le misure.
Le osservabili naturali in gioco sono la posizione e la velocità della particella. Le forze non sono direttamente osservabili, ma lo sono i loro effetti, che consistono in un cambiamento di velocità e/o di direzione del moto. La massa compare come una costante di proporzionalità fra accelerazione e forza. Le osservabili costituiscono le variabili di stato della particella, ossia le variabili che specificano lo stato del sistema, e una successione di stati rappresenta l'evoluzione del sistema. L'evoluzione del sistema viene ottenuta facendo dipendere le variabili di stato (i risultati delle loro misure) dal tempo.
Nella descrizione usuale dell'evoluzione degli stati di un sistema si riportano in grafico solamente le posizioni.
In questo contesto, diciamo che un sistema è *causale* se la sua evoluzione è tale che, una volta precisato lo stato a un particolare istante t_0, è possibile prevedere esattamente lo stato corrispondente a ogni istante successivo t, e, con una operazione di inversione, lo stato a un tempo t precedente, la cui evoluzione ha portato allo stato dato al tempo t_0. La simmetria tra passato e futuro è così assicurata.
Considerando la superba proprietà di uno stato, siamo dunque in grado di rispondere a una delle questioni fondamentali di qualunque ramo della fisica: "Se al tempo t_0 si assegna un sistema in un dato stato, che risultati si otterranno dalle misure fatte a un tempo successivo t?".
Un tale modo di ragionare viene esemplificato in maniera magistrale dalla meccanica classica, in particolare dalla seconda legge del moto.

Principio di inerzia di Galileo (o prima legge del moto di Newton)

L'inerzia di una particella è la proprietà di resistere od opporsi alla accelerazione.
Se la particella è libera, cioè non soggetta ad alcunché che la acceleri, nello spazio piatto permane nello stato di moto in linea retta con velocità costante. Questa affermazione, per avere un significato operativo, deve essere riferita ad un osservatore che sia solidale con un sistema di riferimento non accelerato detto inerziale. Abbiamo bisogno infatti di un sistema non accelerato rispetto al quale misurare le accelerazioni.
Supponiamo che esistano delle regole per stabilire che un sistema S formato da tre assi ortogonali rigidi è inerziale, allora tutti i sistemi che si muovono, rispetto a S, di moto traslatorio (ossia senza rotazioni) e uniforme sono inerziali.
Le leggi della meccanica, enunciate nella loro forma semplice, valgono solo rispetto ai sistemi di riferimento inerziali.
Per una particella in moto lungo l'asse x, la posizione in funzione del tempo è data dalla semplice equazione $x = x_0 \pm v_x t$, dove x_0 è la posizione iniziale all'istante $t = 0$ e v_x è la velocità in ogni istante.
È spesso conveniente esprimere la traiettoria della particella in una forma indipendente dall'orientazione degli assi coordinati, che è più o meno arbitraria. Il vettore di posizione **r** in funzione del tempo t è dato dall'equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t = 0) \pm \mathbf{v}t$. L'insieme dei punti che soddisfano l'equazione (cioè la traiettoria della particella) è una linea retta nello spazio: evidentemente, un concetto puramente geometrico.
Fin qui, il problema della traiettoria può essere formulato ignorando la massa.
L'impiego dei vettori per rappresentare le variabili di stato è di facile intuizione nella meccanica classica.

I vettori sono indicati in grassetto.
Il vettore **r** rappresenta la posizione di un punto P rispetto all'origine del sistema.

La velocità

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Nel piano, il vettore **r** è introdotto in luogo delle due coordinate del punto P, che diventano le coordinate del vettore.

$\hat{\mathbf{r}}$ è il vettore unitario avente direzione e verso di **r**.
Il vettore **r** può essere scritto come il prodotto del modulo r del vettore per un vettore unitario $\hat{\mathbf{r}}$.

Le trasformazioni di Galileo

Esattamente come tutti i punti dello spazio infinito sono assolutamente paritari in Euclide, così la logica impone di non privilegiare alcun sistema inerziale rispetto a un altro, ossia, per quanto riguarda gli esperimenti della meccanica, tutti i riferimenti inerziali sono equivalenti (relatività galileiana).
Il problema che ora si pone è quello di rispondere a questa domanda: " Uno stesso esperimento meccanico, come appare ad un osservatore solidale con il sistema S′ in moto rettilineo uniforme rispetto al riferimento inerziale S, tenendo conto delle misure di S ? ".
Non si tratta che di trasformare le coordinate spaziali, ammettendo implicitamente che lo scorrere del tempo sia immutabile. Ci aspettiamo di trovare, sulla base del principio di relatività, che le leggi della meccanica sono identiche, cioè invarianti in forma.
Le trasformazioni di Galileo assicurano in effetti questo risultato.
Per poter esprimere x′, y′, z′ in funzione di x, y, z, bisogna conoscere la distanza fra le origini O e O′ dei due sistemi di riferimento all'istante t = 0.
Supponiamo che le due origini coincidano al tempo t = 0, e che S′ si muova rispetto a S, ossia che l'origine O′ viaggi nel verso positivo dell'asse x con una velocità costante V.

Allora: $x' = x - Vt$ e $v'_{x'} = v_x - V$

$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

Bisogna fare attenzione al segno di V, ma ciò non comporta particolari difficoltà. Supponiamo infatti che una particella sia ferma nel riferimento in moto, allora $v'_{x'} = 0$, ma, quando viene osservata dal riferimento in quiete, la particella possiede la velocità V del riferimento in moto.

Conseguenze del principio di inerzia di Galileo
Il principio della relatività generale

Un osservatore sia in quiete in un sistema di coordinate accelerato, per esempio in un automobile che accelera uniformemente in linea retta, e indichiamo con **a** l'accelerazione rispetto al riferimento inerziale. L'osservatore si sentirà spinto contro lo schienale del sedile. La gravità è assente.
Se l'osservatore lascia libera ad un dato istante una particella, questa manterrà una velocità costante (per il principio di inerzia) e l'osservatore fermo nell'auto vedrà la particella accelerare verso la parte posteriore dell'auto.
Gli effetti della resistenza inerziale all'accelerazione vengono descritti, dall'osservatore accelerato, introducendo una forza agente sulla particella.
In termini matematici: $\mathbf{F} = -m \frac{dv}{dt} = -m\mathbf{a}$,

dove abbiamo utilizzato l'accelerazione costante $-\mathbf{a}$ uguale e opposta alla accelerazione del sistema stesso.
La massa della particella che compare nell'equazione è detta massa inerziale. Le forze inerziali sperimentate da un osservatore in quiete in un sistema di coordinate accelerato sono sempre proporzionali alle masse, ovvero il rapporto forza/massa è una costante. Ne deriva che l'accelerazione è indipendente dalla massa. Questa è una caratteristica notevole della gravità posta chiaramente in evidenza da Galileo.
La forza inerziale che compare nel sistema accelerato è un esempio di forza fittizia. Quando si passa da un sistema inerziale ad un sistema accelerato, non bisogna mai dimenticare di tenere conto della forza fittizia. Se pretendiamo di rimanere fermi in un sistema accelerato, dovremo esercitare o subire forze di compensazione. È esperienza comune che per mantenersi fermi in una giostra che ruota (sistema accelerato) ci si debba imprimere una spinta in direzione radiale verso il centro di rotazione, e ciò per bilanciare la forza centrifuga (fittizia). Più semplicemente, su un aereo che accelera al decollo, a causa dell'accelerazione saremo spinti contro lo schienale del sedile e ci manterremo fermi grazie alla forza che lo schienale esercita su di noi. La questione, tuttavia, è ben altro che un affare di contabilità, giacché la comparsa di forze fittizie crea una dissimmetria fisica fra sistemi inerziali e sistemi accelerati. Infatti, il principio di relatività riguarda la descrizione della fisica solo nei diversi sistemi inerziali, nel senso che una trasformazione delle coordinate lascia inalterata la forma delle leggi.

Ora, il sistema inerziale è un sistema idealizzato e può consentire null'altro che approssimazioni quando si operi con i sistemi reali. Di fatto, considerando le forze fittizie che deviano una particella dal comportamento previsto per il sistema galileiano e incorporando queste deviazioni, come correzioni in senso contrario, nelle condizioni richieste per il sistema galileiano, i fisici utilizzano come riferimenti anche sistemi accelerati.
Una situazione di questo tipo si realizza in modo spontaneo nei riferimenti in caduta libera. Se assumiamo come valida l'identità fra massa inerziale e massa gravitazionale (cioè la massa della particella che compare nell'espressione della forza gravitazionale newtoniana), allora, per un riferimento in caduta libera in cui si lasci libera una particella di prova di massa arbitraria, gli effetti dovuti alla resistenza inerziale all'accelerazione sono esattamente annullati dalla forza gravitazionale. La particella di prova, se non possiede una velocità iniziale relativa al riferimento in caduta libera, appare sospesa nello spazio. Un fenomeno analogo si verifica a bordo di un satellite in orbita, che può essere equiparato a un riferimento in caduta libera.
Ne consegue che un riferimento che cada insieme con una particella libera è, in un certo senso, inerziale.
È evidente che l'idea di definire inerziali i riferimenti in caduta libera non nasce osservando questi riferimenti dalla Terra. I riferimenti in caduta libera sono inerziali in quanto non si rileva accelerazione, rispetto ad osservatori solidali con essi, sulle particelle di prova, senza fare mai alcun riferimento alla Terra e, quindi, considerando sistemi di riferimento di questo tipo ciascuno per proprio conto.
In modo simile, la meccanica usuale definirebbe inerziali i laboratori posti sui pianeti del sistema solare, nonostante l'attrazione dovuta al Sole, naturalmente a condizione che si trascuri la rotazione dei pianeti attorno al proprio asse, la quale è responsabile delle deviazioni, rispetto al comportamento richiesto per il sistema galileiano, esibite dai corpi dotati di velocità iniziale relativa al sistema rotante. Quando si tratti di descrivere correttamente il comportamento dei corpi in prossimità di tali laboratori planetari, non occorre fare alcun riferimento al Sole, la cui attrazione è subita in modo diverso dai pianeti a seconda del raggio dell'orbita, né fare alcun riferimento, nel caso particolare della Terra, alla Luna, che pure è responsabile di fenomeni evidenti come le maree.
Le leggi fisiche, dunque, vanno osservate localmente. Questo punto, talvolta, non è sufficientemente compreso.
Secondo Einstein, per un riferimento in caduta libera, nella cui origine è la particella, valgono, almeno nelle immediate vicinanze della particella, le

medesime leggi della fisica che nei sistemi inerziali di cui si occupa la relatività. Non sorprende che questo principio geometrico, secondo il quale la fisica in un riferimento locale in caduta libera è indipendente dalla velocità e dalla posizione del riferimento medesimo, ammetta delle conseguenze matematiche che conducono alla relatività generale.

In primo luogo, una teoria della relatività, se ha da essere generale, deve incorporare un tale principio. Così, il privilegio di cui godono i riferimenti inerziali, cioè, a rigore, quelli sospesi in un puro spazio euclideo, viene esteso ai riferimenti in caduta libera in un campo gravitazionale, i quali possiedono, secondo Newton, una accelerazione che varia a seconda dell'altezza dalla superficie della Terra.

In secondo luogo, lo scopo di estendere la relatività ai sistemi in caduta libera, richiede l'abolizione di una autentica forza di gravità. Ciò indurrà Einstein ad affrontare il problema del moto dei gravi secondo il metodo di impostazione di Galileo e, ad un livello superiore, lo porterà a reinterpretare gli effetti della gravità newtoniana.

Per quanto riguarda il moto descritto localmente, un osservatore in quiete in un campo gravitazionale (e quindi in moto accelerato rispetto al corrispondente riferimento inerziale locale in caduta libera) è in una situazione equivalente a quella di un osservatore in quiete in un sistema di coordinate accelerato. L'affermazione che un campo gravitazionale, in una regione dello spazio sufficientemente piccola perché in essa il campo possa essere considerato uniforme, è equivalente ad un sistema di riferimento accelerato costituisce il cosiddetto *principio di equivalenza*. La scelta di un riferimento inerziale locale significa l'annullamento del campo gravitazionale nella regione considerata dello spazio, e la possibilità di una tale scelta è l'espressione del principio di equivalenza.

Einstein approccia la meccanica in un modo che era congeniale a Galileo. Partendo dall'osservazione che tutti i corpi posti nel medesimo luogo sono accelerati allo stesso modo dalla gravità, Galileo intese escludere la massa dal problema della traiettoria.

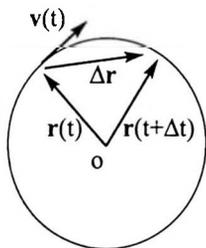
Dal punto di vista galileiano, si pensa di lasciar cadere una particella da una certa posizione e con una certa velocità iniziale. La gravità fornisce allora alla particella una accelerazione definita. Se si lascia cadere una particella con massa diversa dalla stessa posizione e con la stessa velocità iniziale, ne risulta la stessa traiettoria, dal momento che l'accelerazione di gravità non dipende dalla massa della particella. In altri termini, la posizione e la velocità sono le variabili naturali nella trattazione del problema, dato che la massa non ha un ruolo intrinseco.

Einstein si rese conto del significato dell'osservazione di Galileo.
Una volta conosciuto il comportamento di un sistema in assenza di un campo gravitazionale, cioè nello spazio idealizzato, se si vuol introdurre un campo gravitazionale, tutto quel che si deve fare è trasferire il sistema ad un sistema di riferimento accelerato, il che equivale a porsi in quiete in un campo gravitazionale. Infatti, l'osservatore fermo nell'auto e spinto contro lo schienale, il quale esamini forze fittizie dovute ad una accelerazione, trova che le forze sono sempre proporzionali alle masse come accadrebbe se fosse immerso in un campo gravitazionale all'interno di un ascensore.
Il risultato, allora, può essere descritto assegnando alla particella una accelerazione definita (nella direzione e verso di una forza "fittizia" equivalente alla forza di gravità "autentica"), ossia assegnando alla particella, ad ogni istante, una velocità differente. Così, il problema della caduta dei gravi può essere formulato in un modo da ignorare la massa.
Per dirla con Galileo: prima di raggiungere quale che sia "momento di velocità" a partire dalla quiete "si dovrà passare attraverso tutti gli infiniti momenti di velocità minore (o di tardità maggiore)", che formano un continuo di infiniti indivisibili nel tempo.
Per un corpo che cade partendo da fermo in prossimità della Terra, la velocità alla fine del primo secondo sarà di 9,8 metri al secondo, alla fine del secondo secondo di 9,8 x 2 metri al secondo, e cosi via. Alla fine di t secondi la velocità sarà di 9,8t metri al secondo. In simboli: $v = 9{,}8t$.
La formula ci fornisce la velocità raggiunta in funzione del tempo.
Un ragionamento analogo può essere svolto per la distanza percorsa s (ossia per la posizione raggiunta) in funzione del tempo. Galileo trovò la formula esatta: $s = 4{,}9t^2$.
La limitazione matematica di Galileo, isolato in un'epoca in cui il calcolo infinitesimale era sconosciuto e quindi l'idea di forza non aveva ancora ricevuto la forma "ontologica" di una equazione differenziale, gli consentì di non oscurare il senso della fisica.
L'erede intellettuale di Galileo è Einstein, che colse l'osservazione, ne indagò le conseguenze e le tradusse in termini matematici, riducendo la teoria della gravità a un ramo della geometria.
Stante il fatto che il moto dei gravi può essere descritto senza includere la massa e che, in meccanica, una situazione ovvia che dia luogo a un moto indipendente dalla massa è rappresentata dal principio di inerzia galileiano, Einstein pensò che forse si poteva tener conto di questi fatti supponendo che una particella (e il relativo riferimento inerziale locale) si muova in linea retta anche in presenza di un campo gravitazionale.

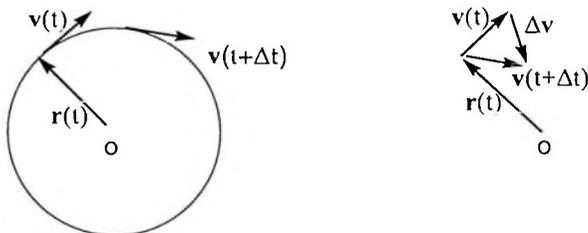
All'obiezione spontanea che tutte le particelle seguono la stessa traiettoria curva (nel caso generale in cui la velocità iniziale e l'accelerazione abbiano direzioni differenti, la traiettoria spaziale è una parabola), la risposta geniale è che in realtà si tratta di una retta, ma in uno spazio curvo. Fisicamente, ciò significa che non dobbiamo più introdurre una fittizia forza di gravità.
Il lettore, sulle prime, preferirà pensare ad una ovvia traiettoria curva immersa in uno spazio piatto, conformandosi all'idea che un campo gravitazionale è equivalente ad un sistema accelerato. Ma, esiste una differenza radicale fra i campi gravitazionali reali e gli effetti dell'accelerazione. Il campo reale è variabile e tende sempre a zero ad una distanza infinita dai corpi che lo generano. Un campo reale non può essere annullato con alcuna trasformazione delle coordinate contemporaneamente in tutto lo spazio.
Abbiamo già detto questo affermando che un campo reale, mediante una scelta adeguata del sistema di riferimento, scompare solo nel punto dello spazio che abbiamo posto in corrispondenza dell'origine del sistema di riferimento in caduta libera. Un tale sistema è solo localmente inerziale.
A rigore, non esiste pertanto, in una regione estesa dello spazio, alcun sistema formato da assi rigidi al quale riferire l'accelerazione così da poterla descrivere, nei suoi effetti apparenti sul moto libero delle particelle, in termini di moto curvilineo in uno spazio visto come un contenitore, dato a priori, di tutte le "cose".
Gli effetti della gravitazione cui è equivalente una accelerazione vengono trattati proprio come un fenomeno di spazio curvo.
Anche la Terra, che nella sua orbita attorno al Sole evidentemente non si muove in linea retta, descrive in realtà una retta, ma in uno spazio curvo. In questo caso, perché la massa della Terra scompaia immediatamente dal problema dell'orbita, dobbiamo considerare una descrizione dell'universo con la Terra inerziale come altrettanto valida e quindi altrettanto reale di quella copernicana.
Il procedimento di Einstein consiste, dunque, nel sostituire al concetto di campo gravitazionale quello di uno spazio con proprietà dalle quali dipenda il moto della particella.
Nel contesto della relatività generale, il modello dello spazio fisico non può essere più quello euclideo. Lo spazio assume una curvatura.
I vettori, la cui utilità e uso si fondano sulla validità della geometria euclidea, cedono il passo a grandezze più astratte che descrivono la deviazione dal teorema di Pitagora in uno spazio curvo. L'impiego di queste grandezze determina non solo la geometria, che sarà non-euclidea, ma anche, da luogo a luogo, la forma della *geodetica*, ossia della curva che fornisce la distanza

minima fra due punti e che, nella geometria risultante, corrisponde ad una retta.
Secondo questa interpretazione, la particella obbedisce ad una equazione geodetica, cioè segue il cammino più breve nello spazio curvo.
L'equazione geodetica sostituisce la prima legge del moto, la quale afferma che particelle libere nello spazio piatto si muovono in linea retta, che è naturalmente il cammino più breve nella geometria euclidea.
Per apprezzare in pieno idee così fuori dal comune, dobbiamo dire che lo spazio (tridimensionale) e il tempo (unidimensionale) vanno considerati in un unico spazio quadridimensionale, in cui vale, finché ci si limiti alla geometria euclidea, il teorema di Pitagora dello spazio piatto. Questo postulato appartiene alla relatività ristretta e verrà discusso nel capitolo dedicato allo spazio-tempo. Con l'adozione di uno spazio-tempo forgiato in un modo da spiegare gli effetti della gravitazione nei termini dei percorsi naturali di corpi fra due punti del nuovo spazio-tempo, la formulazione di Einstein, come l'osservazione di Galileo, non parla di massa, ma di posizione e di velocità.
La teoria della relatività generale contiene il principio di equivalenza tramite la nozione di moto lungo le geodetiche dello spazio-tempo curvo, e permette una descrizione dei fenomeni gravitazionali in un modo formalmente idoneo (o, come si usa dire, in forma covariante) per tutti i sistemi di riferimento tramite una legge di trasformazione. La relatività generale non è, ovviamente, la semplice estensione della relatività ristretta a tutti i sistemi.
Il fatto che la via ad una formulazione puramente geometrica dei fenomeni gravitazionali non sia preclusa, lascia perplessi sulla nozione di "realtà" in fisica. Invero, la formulazione einsteiniana "elimina" la forza di gravità, concetto a noi divenuto familiare dai tempi di Newton, ma non contraddice l'evidenza dei nostri sensi. Su questo punto, vedremo che la meccanica dei quanti saprà essere più sconcertante.
Nel contesto delle teoria della gravità di Newton, l'indipendenza dell'accelerazione dalla massa è un mistero assoluto.
D'altra parte, Newton scoprì che le accelerazioni sono prodotte da forze, che modificano la quantità di moto m·v (cioè il prodotto della massa per la velocità), e che dipendono quindi dalla massa. Solamente nel caso della gravità la massa può essere ignorata (nel caso di una forza elettrica agente su un corpo di carica *e* e massa m, per esempio, l'accelerazione è proporzionale a *e*/m e può variare, come in effetti si verifica, in ragione inversa della massa considerata).

La seconda legge del moto di Newton. La dinamica del moto cicloidale.

Abbiamo già introdotto, considerando gli effetti della resistenza inerziale all'accelerazione, l'equazione esatta per una forza agente su una particella. Tale equazione è la seconda legge del moto.
Accademici di valore sostengono che: "In natura non esistono particelle che si muovono seguendo forme d'onda" (Fritjof Capra, *Il Tao della fisica*). Se ci limitassimo a trattare solo moti riconducibili all' ipotesi dinamica di una forza orientata sempre lungo la medesima retta d'azione o i moti gravitazionali tradizionali, la meccanica potrebbe risultare piuttosto monotona.
Fornirò ora un esempio concreto, che confuta l'affermazione sopra riportata, per illustrare la legge del moto.
La valvola della ruota di una bicicletta in moto traslatorio e uniforme, rispetto ad un osservatore solidale con il marciapiede a lato della strada, traccia una cicloide ordinaria. Ci si chiede come possa essere descritto, e a quali condizioni, il moto di una particella che segua una traiettoria cicloidale. Potrebbe venire in mente, sfruttando l'analogia con la bicicletta, che il sistema di riferimento naturale, da cui osservare il moto, sia il riferimento nel quale il mozzo della ruota della bicicletta appare in quiete. È evidente che la valvola della ruota descrive ora un'orbita circolare. Una semplice trasformazione galileiana del sistema di riferimento, da cui si osserva lo stesso fenomeno, ci consentirà di passare dall'orbita circolare ad una traiettoria cicloidale. Possiamo in tal modo affrontare, da un moto circolare, il problema del moto della particella lungo una complicata traiettoria cicloidale.
Abbiamo già visto che, nel linguaggio vettoriale, la velocità è espressa dalla variazione del vettore di posizione in funzione del tempo: $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

e la velocità ha la direzione della tangente al cerchio.

Gli effetti di una forza agente sulla particella consistono in una variazione del modulo della velocità e/o della direzione del moto. Nel caso del moto circolare uniforme, cambia solo e in modo costante la direzione del moto.

Quindi, la forza deve avere la stessa direzione di **r**, seppure il verso opposto. Il vettore **r** può essere scritto come il prodotto del modulo r del vettore per un vettore unitario $\hat{\mathbf{r}}$ avente direzione e verso di **r**.
Più semplicemente, la forza deve avere la direzione del vettore unitario $\hat{\mathbf{r}}$ ma il verso opposto. Allora possiamo scrivere: $\mathbf{F} = -F\,\hat{\mathbf{r}}(t)$.
Tale forza è indicata, nel moto circolare, con il nome di forza centripeta. Se il vettore unitario ruota in senso orario in modo che la sua punta si muova con velocità costante in modulo, può venire rappresentato mediante delle semplici funzioni trigonometriche:
$\hat{\mathbf{r}}(t) = \cos\omega t\ \hat{x} - \text{sen}\,\omega t\ \hat{y}$

Nella formula, ω è la velocità angolare, che si misura in radianti al secondo (si ricordi che 2π radianti corrispondono a 360°) e ωt è l'angolo in radianti rispetto alla direzione x.
Per esempio, nel tempo t = 0, il vettore unitario è orientato secondo l'asse x, dopo un tempo t tale che $\omega t = \pi/2$, $\cos \pi/2 = 0$ e $\text{sen}\ \pi/2 = 1$, e quindi

$\hat{r} = -\hat{y}$ e il vettore unitario è orientato secondo l'asse $-y$.
Se vogliamo utilizzare questo vettore per indicare l'orientazione della forza (evitando di introdurre il segno meno), esso dovrà essere applicato, conservando direzione e verso, in un punto situato sulla circonferenza del cerchio, cosicché la forza punta verso l'interno della traiettoria. Siamo in grado di scrivere l'equazione della forza agente sulla particella in moto lungo un'orbita circolare in una forma del tipo: $\mathbf{F} = F(\cos\omega t\,\hat{x} - \mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{y})$
La forza **F** è una forza rotante costante in modulo. Ci si attende che l'effetto della forza, cioè l'accelerazione, sia costante in modulo rispetto a un qualunque sistema di riferimento inerziale, indipendentemente dalla forma effettiva del moto.

$$\mathbf{a} = \frac{F}{m}(\cos\omega t\,\hat{x} - \mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{y}) \qquad \text{ovvero: } a_x(t) = \frac{F}{m}\cos\omega t$$

$$a_y(t) = -\frac{F}{m}\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

La derivata della funzione v(t) dà, per definizione, a(t) lungo una stessa direzione coordinata. Integrando le ultime espressioni, cioè cercando delle funzioni la cui derivata dia coseno e rispettivamente −seno (ricordando che la derivata di una funzione seno dà coseno e di una funzione coseno dà −seno, e applicando la tecnica di derivazione per una funzione composta), otteniamo:

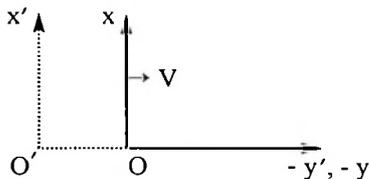
$$v_x(t) = \frac{F}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$v_y(t) = \frac{F}{m\omega}\cos\omega t,$$

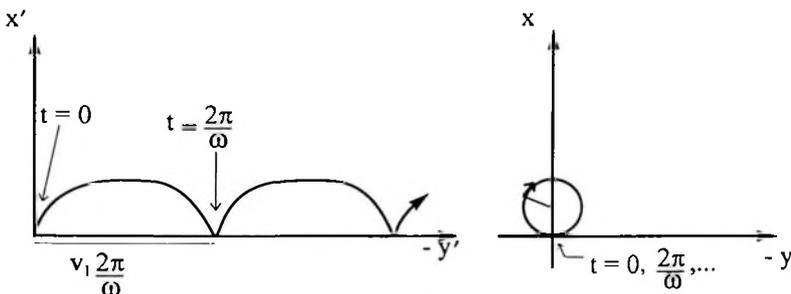
dove $F/m\omega$ è la velocità v_t della particella che si muove con moto circolare uniforme

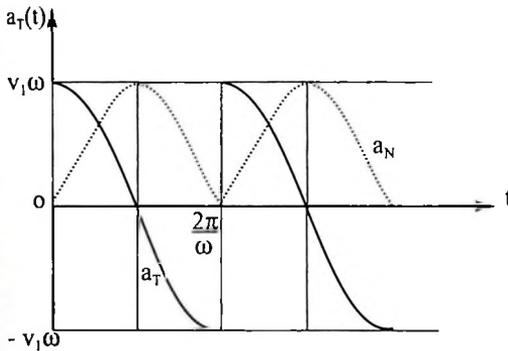
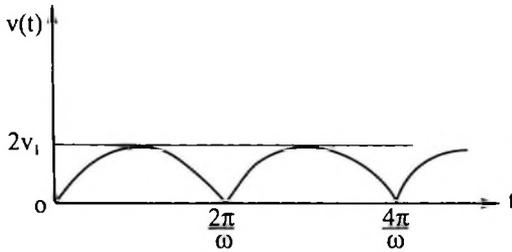
(Si osservi, dalla definizione di angolo radiante come rapporto fra un arco di circonferenza e il raggio R, che $v_t = \omega R$. Ne deriva che $F = m\omega^2 R = m v_t\,\omega$).
Infine: $v_x(t) = v_t\,\mathrm{sen}\,\omega t$

$v_y(t) = v_t \cos\omega t$

È questa l'equazione del moto lungo un'orbita circolare. Una soluzione di questo tipo poteva essere tentata fin dall'inizio, osservando che in un moto circolare uniforme le componenti della velocità lungo x e lungo y sono funzioni sinusoidali del tempo, sfasate di $\pi/2$.
Ora, dobbiamo immaginare che l'osservatore O solidale con la bicicletta, il quale vede l'orbita circolare, si muova nella direzione $-y'$, rispetto all'osservatore O′ fermo al lato della strada, e con velocità di traslazione uguale a V.

Applicando in modo corretto la trasformazione cinematica di Galileo, otteniamo: $v'_{y'} = v_y - V$
Quindi: $v'_{x'} = v_l \,\text{sen}\omega t$
$v'_{y'} = v_l \cos\omega t - V$

Se imponiamo al problema la condizione che V, cioè la velocità di traslazione di un sistema di riferimento rispetto all'altro sia uguale a v_l, cioè la velocità della particella che si muove di moto circolare uniforme, otteniamo l'equazione fondamentale del moto lungo una traiettoria cicloidale.
$v'_{x'}(t) = v_l \,\text{sen}\omega t$
$v'_{y'}(t) = v_l \cos\omega t - v_l$

La condizione imposta è quanto richiesto dall'osservatore fermo al lato della strada perché la particella possa muoversi partendo da ferma. Infatti al tempo $t = 0,\ 2\pi/\omega,\ 4\,\pi/\omega, \ldots, v'_{x'}(t) = 0$ e $v'_{y'}(t) = 0$.
Questa condizione è assicurata naturalmente nell'esempio concreto della bicicletta.

Il grafico riporta la posizione della particella che descrive archi di cicloide. Sulla destra è riportata l'orbita circolare.

Dall'equazione fondamentale del moto cicloidale possiamo ricavare la velocità che dipende dal tempo e quindi l'accelerazione tangenziale a_T ossia il contributo tangenziale all'accelerazione.

L'accelerazione cui è sottoposta la particella è una costante in modulo, dato che l'accelerazione tangenziale al moto curvilineo e l'accelerazione normale danno come somma vettoriale una accelerazione costante in modulo.

L'intero processo, a questo punto, può essere facilmente visualizzato.

Nei punti angolosi della traiettoria cicloidale la funzione v(t) ammette due derivate (una da destra e una da sinistra), ossia due valori per l'accelerazione tangenziale, perché in tali punti la particella arriva frenando fino a raggiungere velocità zero, per poi riprendere il moto lungo la branca ascendente dell'arco cicloidale.

La velocità media di traslazione della particella è v_1.

In corrispondenza dell'apice della traiettoria, la velocità raggiunge il suo valore massimo uguale a $2v_1$, mentre l'accelerazione tangenziale va a zero.

In corrispondenza dell'apice, l'accelerazione è rappresentata solo dal contributo normale (la forza è perpendicolare alla retta su cui poggia l'arco e diretta verso il baricentro della cicloide).

Nel moto circolare, la forza non ammette una componente perpendicolare al raggio, cioè la forza è sempre centrale e mantiene in orbita la particella.

Nella cicloide, la forza ammette una componente tangenziale all'arco, eccetto che in corrispondenza dell'apice.
In natura, una forza rotante costante in modulo, che imprima ad una particella inizialmente ferma un moto cicloidale, è data, rispetto al sistema del laboratorio, da un campo elettrico e magnetico uniformi e incrociati (le forze elettromagnetiche muovono cariche le quali posseggono anche una massa inerziale, che compare nella legge del moto di Newton).
Rimanendo nel contesto della meccanica, ci si potrebbe chiedere quali condizioni debba soddisfare un corpo reale per descrivere una traiettoria ad archi di cicloide. Può trattarsi di un corpo rigido posto, mediante applicazione momentanea di una coppia, in rotazione libera con velocità angolare costante attorno a un proprio asse di simmetria. In questo caso, è sufficiente che la forza sia diretta lungo un asse ortogonale all'asse di rotazione (asse ortogonale supposto solidale con il corpo che ruota).
Che sia questo il modo di traslare dei fantastici dischi volanti?
Ci si potrebbe chiedere, infine, a quali condizioni un corpo rigido debba obbedire per descrivere una traiettoria costituita da archi di cicloide avvitati o torti a spirale nello spazio tridimensionale, come le molecole del DNA.
Questa condizione è stata da me trovata, e corrisponde a quella di un corpo in rotazione libera attorno ad un asse arbitrario non principale (si pensi ad un pallone da rugby, cioè ad un ellissoide che ha una simmetria di rivoluzione attorno all'asse che indichiamo come asse 3, dopo essere stato calciato). Allora il corpo ruota intorno all'asse di simmetria con velocità angolare ω_3 definita (componente della velocità angolare rispetto all'asse considerato) e oscilla con una frequenza Ω proporzionale a ω_3, che può assumere in casi particolari il valore $\frac{1}{2}\omega_3$. Se applichiamo nel centro di massa del corpo una forza costante in modulo diretta lungo un asse ortogonale all'asse 3, il momento delle forze esterne resterà nullo, e ci possiamo attendere una traiettoria sorprendente.
Raccomando queste non facili riflessioni a tutti coloro, se ce ne sono ancora, che credono di poter ridurre il problema del moto di un fotone, cioè di una particella elementare, al moto di una particella materiale.
Ho dimenticato, finora, di scrivere l'equazione del moto nella sua splendida forma. La forma è quella di una equazione differenziale del secondo ordine nella variabile tempo:

[1] $$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

dove la posizione della particella è rappresentata dal vettore posizione **r** che dipende dal tempo.

Potrebbe sembrare che l'insieme di tutti gli stati (cioè lo spazio degli stati) sia proprio l'insieme di tutti i vettori **r**, ma ciò non è del tutto esatto.

L'equazione [1] è una derivata seconda nella variabile tempo, e quindi il valore di **r** all'istante t non è univocamente determinato dal suo valore all'istante t_0 ; è necessario specificare il valore iniziale della velocità (o della quantità di moto).

La struttura causale può essere resa manifesta riscrivendo l'equazione [1] come equazioni del primo ordine, nella forma:

[2] $$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \mathbf{v}(t) = \frac{1}{m}\mathbf{p}(t)$$

[3] $$\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

nelle quali la posizione **r** e la quantità di moto **p** sono viste come variabili indipendenti l'una dall'altra. Se si sostituisce la [2] nella [3] si ottiene, ovviamente, l'equazione del secondo ordine.

Tuttavia la coppia di equazioni [2] e [3], considerata di per sé, è del primo ordine rispetto al tempo, e l'ipotesi della causalità risulta verificata nel senso che i valori di **r**(t) e **p**(t) possono essere determinati una volta che siano stati specificati $\mathbf{r}(t_0)$ e $\mathbf{p}(t_0)$. In altri termini, coerentemente con il punto di vista deterministico, possiamo rappresentare ciascun stato del sistema mediante una coppia di vettori (**r**, **p**) e lo spazio degli stati mediante l'insieme di tutte le coppie di vettori.

Con questa equazione è stata scritta molta parte della fisica.

La forza è stata definita come la variazione (o derivata) della quantità di moto rispetto al tempo. Se una particella dotata di una certa quantità di moto mv cambia la direzione del moto o il modulo della velocità, per il principio di inerzia è soggetta ad una forza. Nell'urto fra due particelle, dato che la quantità di moto totale prima e dopo l'urto si conserva, la forza F_{12}, che la prima particella esercita sulla seconda, è uguale e opposta alla forza F_{21} che la seconda particella esercita sulla prima.
Con la terza legge, entra in scena il secondo attore e il dramma della fisica si movimenta. Nell'interazione fra due particelle, l'evoluzione di ciascuna dipende anche dall'altra, ma, ad ogni istante fissato, gli stati delle due particelle possono essere caratterizzati o definiti in modo indipendente.
L'interazione fra particelle non è vista necessariamente come un'azione mutua di contatto. (L'idea di una "azione a distanza" fra masse gravitazionali sarà sottoposta a critica dalla teoria classica del campo, per la quale l'interazione è un processo locale che si sviluppa fra particella, capace di generare un campo gravitazionale o di subirne l'azione, e campo esterno nel punto occupato dalla particella. Per esempio, l'attrazione verso il Sole che mantiene la Terra in orbita viene interpretata come dovuta all'azione del campo generato dal Sole nel punto occupato dal nostro pianeta).
Inoltre, l'interazione è vista come istantanea, non nel senso che, ad onta della fisica matematica, il processo di interazione non richieda un tempo finito per svilupparsi, ma nel senso che, ad ogni istante, $F_{12} = - F_{21}$. (L'idea newtoniana di una interazione istantanea sarà sottoposta a critica dalla quantomeccanica, la quale interpreta in modo nuovo il concetto di campo, che acquista il ruolo dinamico di una "particella". È quest'ultima che trasporta la quantità di moto rendendo possibile l'interazione come processo di scambio. L'espressione $F_{12} = - F_{21}$ non è più valida istantaneamente, perché non tiene conto della quantità di moto, per cosi dire, in volo, che costituisce l'oggetto dello scambio).
In breve, la realtà fisica è ipotizzata, nella meccanica di Newton, come costituita da particelle materiali le cui variazioni consistono solamente nei moti governati dalle equazioni differenziali.
Newton era atomista in fisica e avrebbe condiviso la descrizione che fa del mondo Tito Lucrezio Caro in un famoso passo del *De rerum natura*: "Ogni volta che la luce del sole entra, spandendo il suo fascio luminoso nell'oscu-

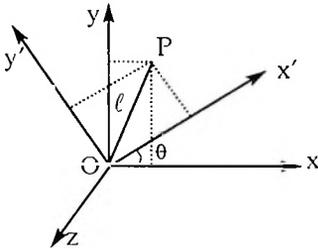
rità delle nostre dimore, vedrai una moltitudine di corpi minuti (il pulvisco-lo) mescolarvisi in mille modi... Le agitazioni di quei granelli rivelano movimenti segreti, dissimulati nel fondo della materia. Spesso vedrai molti di essi, sotto l'impulso di urti invisibili, cambiare cammino e, respinti, invertirlo, qua, là, in ogni direzione. Questo viaggio errabondo proviene tutto dagli atomi ".

Certamente, di tale descrizione, Newton avrebbe denunciato l'ignoranza della complessa meccanica della causalità.

Nell'Ottocento, il disegno matematico della natura, ad opera di J.C. Maxwell, verrà esteso e rafforzato in un corpo di equazioni al punto da rendere superflua ogni spiegazione in termini meccanici. Campi continui, governati da equazioni alle derivate parziali, rappresentano la realtà fisica e assicurano, nel caso dei fenomeni elettromagnetici, in modo simile alle onde, il trasporto, oltre che di energia, di quantità di moto (fatto quest'ultimo responsabile della pressione di radiazione).

Verso la fine del secolo, la meccanica delle particelle verrà ripresa, secondo il modo di vedere della statistica, da Boltzmann, che pure divulgò nella Mitteleuropa la teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell (Maxwell stesso aveva già intrapreso studi statistici importanti sul moto delle molecole dei gas).

L'idea di "particella" in connessione con la radiazione elettromagnetica viene definitivamente imposta da Planck e successivamente corroborata dalle osservazioni di Einstein sull'effetto fotoelettrico, assumendo, fin dall'inizio, dei lineamenti sconcertanti, a dispetto delle intenzioni coscienti dei suoi stessi scopritori.

Se una legge, un processo o anche un oggetto non variano quando vengono sottoposti a certe operazioni, la cosa è segnalata dai fisici dicendo che la legge o il processo godono di simmetria rispetto a quelle operazioni.
La simmetria è un concetto essenzialmente geometrico e, quindi, ci si potrebbe chiedere, come primo esempio, rispetto a quale operazione la distanza fra l'origine O di un sistema di assi coordinati e un punto P (x, y) non varia. È evidente che quando il sistema di assi coordinati ruota di un certo angolo (intorno all'asse z), le coordinate del punto P cambiano in modo tale che la lunghezza del segmento OP rimanga costante.

$$\ell^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

Si noti che le coordinate di x' (o di y') lungo x e lungo y sono funzioni sinusoidali di θ sfasate di π/2, cosicché:
$x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta$
$y' = -\,x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta$

L'operazione richiesta è una rotazione degli assi coordinati.
Le trasformazioni corrispondenti alla rotazione, che si ricavano esprimendo le coordinate accentate in funzione delle coordinate non accentate, assicurano l'invarianza di ℓ^2. Ciò vuol dire che i sistemi, ottenuti per rotazione di un angolo qualsiasi intorno all'asse z, sono equivalenti con riferimento al fatto che ℓ^2 è un invariante rispetto a una trasformazione delle coordinate fra sistemi di questo tipo.
In modo analogo se attribuiamo alla distanza OP le proprietà di un vettore. È evidente che quando il sistema ruota, le coordinate del punto P (le coordinate del vettore) cambiano in modo tale che il vettore **OP** rimanga fisso nello spazio. Ma, un sistema che ruoti con velocità angolare costante ω intorno all'asse z di un sistema inerziale non è equivalente al secondo, quando ci riferiamo all'evoluzione del medesimo vettore **OP** ottenuta facendo dipendere le coordinate del vettore dal tempo. Stiamo ora parlando della legge del moto. Il vettore **OP** svolge il ruolo di un vettore di posizione **r** e la legge del moto, formulata nei due sistemi, non è invariante. Infatti, il sistema rotante è un sistema accelerato (non inerziale), e non bisogna mai

dimenticare, nel passaggio da un sistema inerziale ad uno accelerato, di introdurre un termine fittizio.
Nella meccanica, i sistemi inerziali sono equivalenti, dal momento che le leggi sono invarianti in forma rispetto alle trasformazioni di Galileo. La relatività ristretta riformula in modo nuovo il problema delle trasformazioni, senza rinunciare alla simmetria, che anzi sarà posta con maggior evidenza.
Interessiamoci ora all'effetto prodotto da una rottura della simmetria.
Il medesimo vettore **OP**, osservato nel sistema in cui è fermo e osservato da un sistema che ruota con velocità angolare costante ω intorno all'asse z del sistema inerziale, viene indicato dai fisici come un invariante. Dal momento che abbiamo trovato conveniente fare alcune specificazioni riferendoci ad un punto fisso, il lettore potrebbe congetturare che l'invarianza del vettore non sia stata stabilita con riferimento ai risultati di misure locali, eseguite nei sistemi implicati. Nel nostro caso, l'invarianza vuol dire semplicemente che non fa alcuna differenza individuare la posizione del punto P per mezzo delle coordinate del sistema inerziale oppure utilizzando le coordinate del sistema rotante, ricavate dalle relazioni di trasformazione con $\theta = \omega t$, ad ogni istante dato. Così, l'invarianza viene postulata in modo da non far nascere neanche il problema del moto e attribuita alla proprietà matematica che ha un vettore di potersi decomporre in infinite coppie di vettori mutuamente ortogonali, che possono essere scelte altrettanto bene per indicarlo.
Però, quando deriviamo le coordinate rispetto al tempo e ulteriormente deriviamo le relazioni ottenute rispetto al tempo, compare nel sistema rotante un termine aggiuntivo o fittizio che ha la forma di una accelerazione centripeta, in accordo con il fatto (comprensibile senza eseguire alcun calcolo) che il punto P è visto, nel sistema rotante, accelerare verso l'origine. La legge del moto nel sistema rotante non può più essere scritta semplicemente, a differenza dei sistemi inerziali, come una relazione fra la forza applicata e l'accelerazione osservata. Questa circostanza esprime una rottura della simmetria.
Per il sistema rotante, il vettore **OP** appare ruotare nel tempo con velocità angolare costante negativa (in senso orario). Un processo rappresentato da un fenomeno che si ripete indefinitamente, con ciascun ciclo identico al precedente, è, in realtà, ben misera cosa e non possiede alcuna informazione, eccetto, per così dire, quella della sua esistenza.
Supponiamo che la velocità angolare ω del sistema rotante non resti sempre la stessa, supponiamo di farle assumere valori leggermente diversi: $\omega + \Delta\omega$, $\omega + 2\Delta\omega$.... La rottura della simmetria può così manifestarsi appieno. Il processo non è più periodico, ossia i cicli differiscono dai precedenti, e ciò genera informazione.

Siamo ora in grado di capire che una successione di eventi dotata di informazione e aperiodica, ossia una successione in cui deve esserci un ben definito senso di lettura, può nascere solo da una rottura della simmetria. Come Schrödinger scrisse in modo davvero lucido, il DNA è "un cristallo aperiodico". L'affermazione può sembrare ovvia quando si consideri che un cristallo possiede una struttura atomica regolare (escludendo dislocazioni e altri difetti sempre presenti), mentre la molecola di DNA è caratterizzata da una sequenza lineare irregolare di quattro basi nucleotidiche, ed ha nel suo complesso la forma di una doppia elica. Il fatto importante è che le molecole di DNA hanno tutte praticamente le stesse proprietà fisiche, quale che sia l'ordine in cui si susseguono i nucleotidi, e pertanto, dal punto di vista della fisica, si può sostenere che un sistema costituito dalle molecole di DNA gode di simmetria rispetto a quelle operazioni (ideali) che cambiano l'ordine dei nucleotidi, esattamente come un cristallo è simmetrico rispetto ad operazioni di traslazione.
Però, al livello biologico, nel momento in cui ci rendiamo conto che i vari segmenti di DNA, materializzando i vari geni, generano informazioni per l'organismo completamente diverse l'una dall'altra, vediamo che quella simmetria non esiste. Siamo portati anzi a concludere che l'organismo, come tale, si è affermato proprio in quanto quella simmetria è stata rotta.
Osservando un vettore rotante (che, nel problema che ci accingiamo a trattare, può essere declassato a semplice quantità scalare come il raggio di una ruota che gira), l'informazione che interessa dal punto di vista della cinematica è quella relativa alla posizione e alla velocità del vettore, poiché l'informazione è una misura della precisione con cui si localizza lo stato del sistema nello spazio di tutti i possibili eventi. Una variazione nella velocità angolare dà luogo ad una differenza nella posizione rispetto a quella prevista per il vettore in moto con velocità iniziale ω. Invece di visualizzare il vettore rotante in modo continuo, si immagini di eseguire delle istantanee stroboscopiche a intervalli regolari che corrispondono al periodo dello stroboscopio. Se lo stroboscopio ha la stessa frequenza o velocità angolare del vettore in moto con velocità iniziale ω, il vettore apparirà immobile, cioè ogni istantanea lo coglierà nella stessa posizione. La posizione può essere determinata considerando l'angolo fra il vettore e una direzione fissata nel piano in cui ha luogo la rotazione (si scelga per l'angolo il valore zero). Quando la velocità angolare del vettore rotante sia lievemente maggiore di una quantità $\Delta\omega$ rispetto a quella dello stroboscopio, il vettore apparirà con intermittenza ruotare lentamente alla velocità $\Delta\omega$ (e di un angolo $\Delta\omega t$) e in un tempo $t = 2\pi/\Delta\omega$ avrà compiuto un ciclo completo. Questo tempo, che

sarà uguale o prossimo ad un multiplo del periodo dello stroboscopio, è quel che si richiede per accertare facilmente, mediante un'osservazione della posizione del vettore rotante, la variazione nella velocità angolare di questo vettore.

Naturalmente, l'informazione sul comportamento effettivo del sistema esige che si misurino le variabili che specificano lo stato del sistema. Appare quindi opportuno introdurre il problema della misura. Alla luce del fatto che l'importanza dell'informazione nasce dalla rottura di simmetria, cioè dalla rottura di una visione del mondo statica, nella quale stanno poche cose ma ciascuna in modo sostanziale ed eterno, appare molto opportuno introdurre di quel problema l'aspetto foriero di tempesta.

Supponiamo che la variazione nella velocità angolare rappresenti l'incertezza sulla velocità angolare iniziale del vettore rotante. Allora, per accertare, mediante un'osservazione della posizione del vettore, un intervallo $\Delta\omega$ sempre più piccolo, riducibile allo zero, dovremmo far tendere $\Delta\omega$ a zero e quindi prolungare l'osservazione per un tempo infinito. Ma, un esperimento prima o poi deve terminare! Una misura di durata infinita in linea di principio è impossibile. Ciò significa che non possiamo accertare la velocità angolare iniziale con un grado di precisione arbitrario. Ne segue, per quanto piccola sia l'imprecisione iniziale, che dopo un intervallo di tempo abbastanza grande dell'ordine di $\Delta t = 2\pi/\Delta\omega$ o maggiore, la posizione del vettore rotante sarà del tutto indeterminata.

Questa conclusione mette in evidenza, più di quanto normalmente si faccia, l'affinità del quadro epistemologico sia nel dominio classico sia in quello quantistico, laddove il problema della misura costituisce un fatto centrale e l'indeterminazione assumerà una struttura concettuale appropriata.

Un altro concetto importante, cui voglio accennare, è la simmetria tra passato e futuro.

Nella meccanica classica, specificate le condizioni iniziali, l'evoluzione degli stati di un sistema è esattamente prevedibile ed è sempre possibile, per così dire, srotolare il sistema passando attraverso tutti gli stati attraverso i quali si era avvolto.

La termodinamica mantiene un tale concetto, perché, non appena si includa nella descrizione dei sistemi termodinamici irreversibili la teoria delle fluttuazioni, la simmetria tra passato e futuro è ristabilita.

La quantomeccanica, invece, infrange la simmetria tra passato e futuro, indebolendo così l'ipotesi della causalità.

La relatività ristretta e le trasformazioni di Lorentz
L'equivalenza fra massa e energia

La meccanica di Newton, nelle interazioni a lungo raggio fra due particelle, dice quello che accade in un dato istante rispetto a quello che accade in un altro istante, ci dice come calcolarlo da un istante all'altro, ma per quanto riguarda lo spazio fa intervenire due punti diversi. Questo modo di trattare le relazioni fra gli eventi è terribilmente inadeguato perché parte dall'idea, non espressa, che, nell'universo fisico, vi sia un collegamento istantaneo fra due punti separati nello spazio.

Uno dei grandi meriti di Einstein fu quello di aver sottoposto a critica questa idea, richiamando l'obbligo di principio che ogni affermazione in fisica sia suscettibile di verifica (almeno ideale). Spetterà proprio ad Einstein introdurre il principio di località, già ricordato nella terza legge del moto, per eliminare i problemi che l' "azione a distanza" genera in ordine alla causalità, cioè in ordine al fatto che un collegamento causale fra eventi è il risultato di un segnale trasmesso con velocità finita minore o uguale a c (fatto, si noti per inciso, non poi tanto evidente a proposito della luce, dato che non ci si libera mai del tutto dal potere di una antichissima sensazione secondo la quale la luce non va dall'oggetto all'occhio, ma dall'occhio all'oggetto).

All'epoca di Einstein, l'ipotesi di una sostanza quale supporto delle onde luminose, chiamata etere luminifero, non solo si era rivelata superflua, ma conduceva a certe difficoltà quando la propagazione della luce veniva studiata in relazione ad osservatori diversi in moto l'uno rispetto all'altro.

L'ipotesi nuova da cui prende l'avvio la relatività ristretta non appartiene al comune buon senso, ma è fondata sul terreno della sperimentazione: la velocità della luce è indipendente dalla velocità del riferimento.

Le trasformazioni di Lorentz sono la semplice conseguenza di questo principio. Innanzitutto, il nuovo principio ci consente di stabilire una regola per la sincronizzazione di orologi lontani, valida in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Due orologi fermi in un riferimento inerziale possono essere sincronizzati lampeggiando con una sorgente di luce posta a metà strada fra loro: ciascuno parte da zero nell'istante in cui il lampo li raggiunge. Due eventi separati nello spazio possono così essere trattati simultaneamente.

Consideriamo un'onda luminosa emessa da una sorgente puntiforme in quiete rispetto al sistema di riferimento S. Il fronte d'onda (l'insieme dei

punti che vibrano in concordanza di fase) è la superficie di una sfera, se lo si osserva dal riferimento S. In altri termini, se dall'origine O del sistema S, nell'istante t = 0, parte un impulso di luce, esso raggiunge al tempo t i punti della superficie di una sfera di raggio ct immersa in uno spazio piatto tridimensionale e centrata nell'origine O di S. La superficie sferica è l'insieme di tutti i punti che soddisfano al vincolo:
$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$, dove si è applicato il familiare teorema di Pitagora in uno spazio piatto tridimensionale.
Consideriamo ora un sistema di riferimento S′ in moto rettilineo uniforme rispetto a S nella direzione (+ x).
Al tempo t = 0, le origini dei due sistemi coincidano.
Il moto relativo avviene con la stessa velocità V, seppure ovviamente con versi opposti. Il fatto che la velocità relativa sia la stessa esprime correttamente l'equivalenza dei due sistemi S ed S′.
Secondo il principio della costanza della velocità della luce, il fronte d'onda, anche quando venga osservato nel sistema S′, deve essere una sfera centrata nell'origine O′ di S′, perché, in caso contrario, saremmo in grado di decidere con una trasformazione galileiana che la velocità della luce dipende dalla velocità del riferimento rispetto a S. L'ipotesi fondamentale, che la velocità della luce sia indipendente dalla velocità del riferimento, richiede che non sia possibile dedurre dalla forma del fronte d'onda se il riferimento è, o no, in moto rispetto al punto di emissione.
Allora per un osservatore in S′, l'equazione del fronte d'onda deve avere la stessa forma, ossia:
$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$

Ho indicato, per la velocità della luce, sempre il valore c, come nel sistema S. Ancora nella luce del Rinascimento, con parole non molto dissimili, l'insigne panteista G. Bruno credette di dover descrivere l'universo: " Possiamo affermare con certezza che l'universo è tutto esso centro, o che il centro dell'universo sta dappertutto.... " (*De la causa, principio et uno*, 1584).
La domanda che si pone ora è quella formulata per le trasformazioni di Galileo, la medesima ma in un contesto diverso: " Uno stesso evento (caratterizzato da tre coordinate spaziali e una coordinata temporale), come appare ad un osservatore solidale con il sistema S′ in moto rettilineo uniforme rispetto al riferimento S, tenendo conto delle misure di S dopo quanto appreso dall'invarianza di c ? ". Qui, uno stesso evento è indicato da due orologi, l'uno solidale con S′ e l'altro solidale con S, che coincidono nello spazio nel momento in cui viene effettuata la misura. I due orologi così col-

locati possono non essere sincronizzati, ma l'evento a cui si riferiscono è il medesimo, osservato da due punti di vista. Chiarito questo aspetto, passiamo ad esprimere le coordinate spaziali e la coordinata temporale accentate in funzione di quelle non accentate in modo da ottenere delle relazioni che assicurano l'invarianza in forma dell'equazione del fronte d'onda. Dopo passaggi algebrici piuttosto noiosi, otteniamo le trasformazioni di Lorentz:

$$x' = \gamma(V)(x - Vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma(V)(t - \frac{V}{c^2}x)$$

Risolvendo rispetto alle variabili non accentate, si trovano le trasformazioni reciproche o inverse. Queste relazioni furono scritte in modo esatto dal fisico olandese Lorentz, che si rese conto della loro proprietà di assicurare l'invarianza delle leggi dell'elettromagnetismo quando si passa da un sistema ad un altro. Ma per Lorentz la t' era una variabile artificiosa introdotta ad hoc, mentre, secondo l'interpretazione data successivamente da Einstein, si tratta proprio del tempo definito operativamente mediante orologi solidali con il sistema di riferimento S'.
La caratteristica di queste trasformazioni risiede nel fatto cha la x e la t vengono mescolate quando si passa da un sistema ad un altro. Ciò ha delle importanti conseguenze in termini geometrici, delle quali parlerò più avanti.
Vediamo ora di impostare, con un semplice ragionamento, una trasformazione di Lorentz, e di ricavare il valore del fattore γ. Questo fattore deve tendere a 1 per $V/c \to 0$, perché quando V tende a zero o c all'infinito le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo.
Un sistema S' viaggi nella direzione (+x) del sistema S supposto in quiete. Un'onda luminosa parte dall'origine dei due sistemi nell'istante in cui le origini si sovrappongono. Le condizioni iniziali in S e S' sono ($x = 0$, $t = 0$) e rispettivamente ($x' = 0$, $t' = 0$). L'evento è rappresentato dall'arrivo dell'onda ad un orologio fermo in un punto x di S, che coincide nello spazio con un orologio solidale con S'. La distanza percorsa dalla luce è $x = ct$ e rispettivamente $x' = ct'$. Il sistema S', nel tempo che la luce impiega a raggiungere l'orologio in S, si sposta di una distanza pari a Vt secondo le misure di S. Il fatto importante è che il fronte d'onda sferico, anche quando osservato in S', è centrato nell'origine O' di S'. Allora non è possibile collegare per mezzo di una trasformazione galileiana le osservazioni effettuate nei due sistemi. Già è evidente, per simmetria, che due eventi separati nello spazio e simultanei in S, sono separati nello spazio e nel tempo in S'.

Dobbiamo quindi cercare di generalizzare le trasformazioni di Galileo in modo tale da conservare inalterata la velocità relativa di un sistema in moto rispetto all'altro, la quale esprime l'equivalenza dei due sistemi. L'unica possibilità è quella di scrivere: $x' = \gamma (x - Vt)$ ovvero $ct' = \gamma (c - V) t$

e per la trasformazione reciproca: $x = \gamma (x' + Vt')$ ovvero $ct = \gamma (c + V) t'$

Moltiplicando membro a membro queste due relazioni, ed eliminando il termine comune tt', otteniamo:

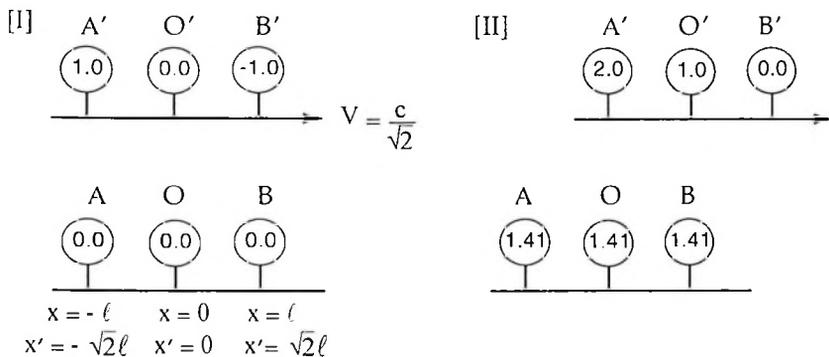
$$\gamma (V) = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

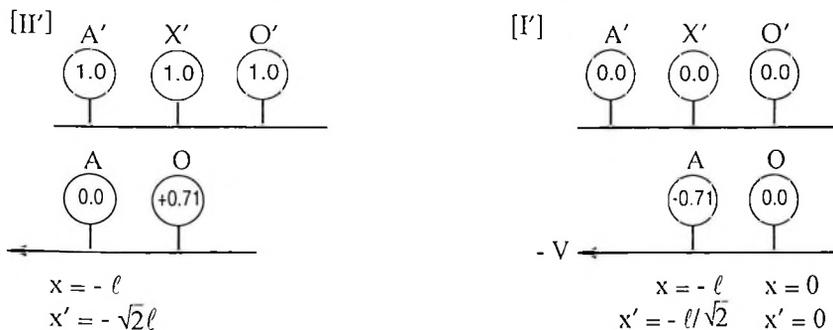
Mentre eseguivo tale semplice calcolo, mi sono ricordato dell'articolo di Abraham Pais: "Come Einstein ottenne il premio Nobel ". Nel 1921, l'oftalmologo Gullstrand fu incaricato dall' Accademia Reale svedese di controllare i calcoli di Einstein. Li sbagliò e si pronunciò contro la teoria. Einstein deve quindi ad un mio illustre collega medico se non ottenne mai il Nobel per la relatività, premio che invece gli fu assegnato nel novembre 1922 per il suo lavoro sull'effetto fotoelettrico.
La comprensione del significato fisico delle trasformazioni di Lorentz può riuscire più facile se ci riferiamo ad un esempio concreto, precisamente ad un treno S′ che corra con velocità relativistica lungo la banchina di una stazione. Sulla banchina S sono disposti 3 orologi A, O, B sincronizzati tra loro, a distanza ℓ l'uno dall'altro. L'orologio O si trova nell'origine del sistema S. Sul treno S′ sono disposti i 3 orologi A′, O′, B′, che coincidono nello spazio con gli orologi non accentati nel tempo del sistema stazionario $t = 0$.
Operiamo le seguenti scelte: $V = \frac{c}{\sqrt{2}}$ quindi $\gamma = \sqrt{2}$

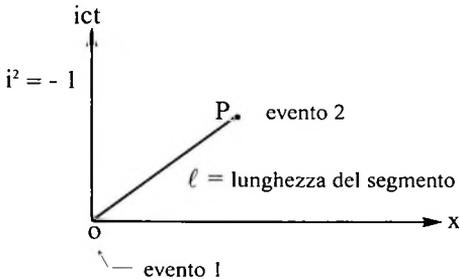
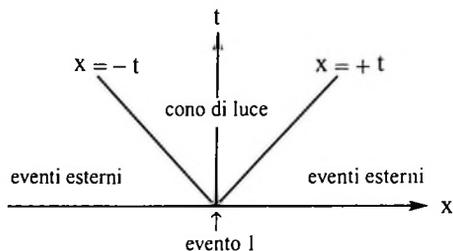
e $\ell = 300\text{m}$ (secondo le misure di S).

Ogni coppia di orologi coincidenti corrisponde a un evento caratterizzato da una coordinata spaziale e una temporale, che cambiano a seconda del riferimento. Dalla adatta relazione di Lorentz, si ricava che l'espressione

$$\left| -\gamma \frac{V}{c^2} x \right| = 10^{-6} \sec = 1 \mu s$$

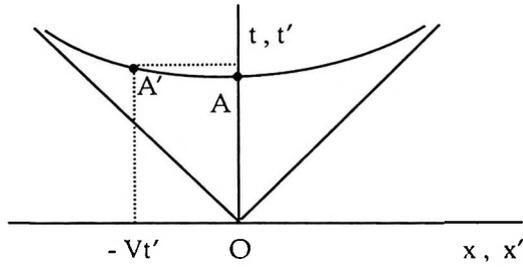
fornisce in S′ il modulo della desincronizzazione di un orologio collocato a distanza $\ell = 300\text{m}$ dall'origine come viene misurata in S.
Esaminiamo due istantanee:

Gli orologi A, O, B sono sincronizzati e ciò significa che le figure sono disegnate coerentemente con il punto di vista di S. Il confronto della lunghezza del segmento A′O′ con quella del segmento AO, quando gli orologi posti a ciascuna estremità del segmento AO segnano lo stesso tempo, dà come risultato $\ell' = \sqrt{2}\ell$. La lunghezza del segmento viaggiante A′O′ appare dunque contratta di un fattore γ secondo le misure del sistema stazionario (contrazione delle lunghezze).

Un orologio di S′ (per esempio A′) nel passare da [I] a [II] avanza di 1μs. Questo intervallo di tempo proprio, misurato da un singolo orologio solidale con il sistema in moto S′, confrontato con il tempo improprio, indicato dai due orologi corrispondenti fermi nel sistema stazionario S, dà come risultato $\Delta t' \sqrt{2} = \Delta t$. L'intervallo di tempo misurato nel sistema stazionario appare dunque ampliato di un fattore γ rispetto al tempo proprio misurato da un singolo orologio viaggiante (dilatazione del tempo). Disegno, senza commentarla, la figura [I] (una parte della figura) e la sua evoluzione coerentemente con il punto di vista di S′. Vi ho inserito un orologio X′ per evidenti ragioni legate alla contrazione delle lunghezze e alla simultaneità.

Esauriti i preliminari, a questo punto i fisici iniziano a parlare della meccanica relativistica. Noi ci accontenteremo di alcune osservazioni a proposito dell'equivalenza fra massa e energia.
Le trasformazioni di Lorentz impongono il riesame delle leggi del moto, in modo che l'invarianza in forma delle leggi sia assicurata rispetto a queste nuove trasformazioni. Ciò sarà ottenuto in tutti i casi. La conservazione della quantità di moto negli urti è ristabilita attribuendo alla massa inerziale l'espressione relativistica $m(v) = \gamma\, m_0$, dove m_0 è la massa a riposo della particella.
Il rifacimento del calcolo dell'energia cinetica di una particella che si muove con velocità v rispetto a un osservatore, dà: $E_k = (m - m_0)c^2$. Il risultato ottenuto è molto suggestivo. Esso consente di definire l'energia totale di una particella libera mediante l'espressione:
$E = (m - m_0)c^2 + m_0c^2$, dove m_0c^2 è l'energia di riposo della particella.
L'energia totale della particella, come qui definita, comprende l'energia cinetica e l'energia di riposo, ma non l'energia potenziale in un campo esterno di forza. L'equazione indica che l'energia cinetica può essere fatta corrispondere a un incremento di massa, in conseguenza della dipendenza della massa dalla velocità. Si può estendere questa interpretazione per associare una variazione di massa Δm ad ogni variazione ΔE dell'energia del sistema, secondo la semplice relazione $\Delta E = (\Delta m)c^2$.
La cosa è immediata se pensiamo all'energia cinetica che è distribuita nei moti disordinati delle molecole di un gas e dai cui valori medi dipende la temperatura. La generalizzazione a casi in cui intervengono energie potenziali interne (per esempio negli urti anelastici) o di altro tipo si attua applicando la legge di conservazione dell'energia.
La massa di un corpo, quindi, diventa una misura dell'energia da esso posseduta. Così, quando comprimiamo una molla, la sua massa a riposo aumenta di una quantità pari al lavoro richiesto dalla compressione diviso per c^2. La variazione di massa è certo impercettibile, ma il contributo della teoria è clamoroso perché con esso si aprirà un accesso al mondo della microfisica.

Per ottenere una trasformazione di Lorentz, servono due coordinate, una spaziale e una temporale. Il fatto che la x e la t vengono mescolate nella trasformazione di Lorentz, suggerisce un'analogia con le trasformazioni corrispondenti a rotazioni del sistema di assi coordinati, dove x e y sono mescolate per dare x′ e y′.
Allora, una maniera di rappresentare una trasformazione di Lorentz è quella di farla corrispondere a rotazioni degli assi coordinati spaziotemporali nel modo seguente:

L'espressione $x^2 - c^2t^2$, e quindi anche la $c^2t^2 - x^2$, è un invariante per trasformazioni di Lorentz, ossia ha lo stesso valore numerico in tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.
Se per il tempo come per lo spazio usiamo un'unità metrica di lunghezza, il fattore di conversione è la velocità della luce, e un secondo corrisponde a trecento milioni di metri. Noi porremo semplicemente $c = 1$.
L'espressione $t^2 - x^2$ indica il quadrato della distanza s fra l'evento 1 di coordinate ($x = 0$, $t = 0$), posto all'origine del sistema, e l'evento 2 di coordinate (x, t). In simboli: $s^2 = t^2 - x^2$.
Quando gli eventi 1 e 2 sono collegati con un segnale luminoso, $x^2 = t^2$ e quindi $s^2 = t^2 - x^2 = 0$. Però, non tutte le relazioni fra gli eventi ammettono una distanza nulla, quali il tempo che intercorre fra due eventi che avvengono in uno stesso punto ($s^2 = t^2$) o la distanza fra due punti dello spazio in un dato istante ($s^2 = - x^2$).
Tutti gli eventi separati dall'evento 1 da una distanza o intervallo s nullo giacciono sulle rette $x = \pm t$. La rappresentazione grafica di questa situazione conduce al diagramma del cono di luce.

$s^2 = 0$ (intervallo nullo o di tipo-luce): l'evento 2 giace sulle rette $x = \pm t$, ossia sul cono di luce (vi può essere collegamento con un segnale luminoso)

$s^2 > 0$ (intervallo di tipo-tempo): l'evento 2 giace nel cono di luce del futuro rispetto all'evento 1 (causalità possibile)

$s^2 < 0$ (intervallo di tipo-spazio): l'evento 2 giace fuori del cono di luce (causalità esclusa)

Se invece di una sola coordinata spaziale, ne avessimo considerate tre, essendo $y = y'$ e $z = z'$ in trasformazioni di Lorentz caratterizzate da una velocità relativa secondo l'asse x, avremmo ancora il quadrato della distanza s invariante: $s^2 = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$.
Si noti che la formula per la distanza è quella del teorema di Pitagora valido in uno spazio piatto quadridimensionale a parte il segno meno. Ciò significa che siamo in presenza di quella che viene propriamente detta una geometria "iperbolica", e il segno meno riflette la differenza fisica tra spazio e tempo. (In questo senso la ben nota osservazione che "la relatività pone spazio e tempo sullo stesso piano" è un po' fuorviante).
Riassumendo, osservatori diversi (che si muovono l'uno rispetto all'altro con velocità costante) scompongono diversamente lo spaziotempo in spazio e tempo. Le coordinate di un osservatore sono x e t, quelle dell'altro sono x′ e t′. Gli assi Ox′ e Ot′ (così come Ox e Ot) sono perpendicolari tra di loro. L'evento 2 è individuato da un osservatore mediante (x, t), dall'altro mediante (x′, t′). I due osservatori vedono il medesimo cono di luce, definito dall'insieme dei punti caratterizzati da $s = 0$, e trovano il valore del quadrato dell'intervallo, s^2, costante. Nel disegno del cono, l'evento 1 corrisponde al vertice; un evento 2 relativo al sistema S, separato dal primo evento da un intervallo tale che $s^2 = t^2$, si trova in un punto A dell'asse Ot, mentre il medesimo evento relativo a S′ si trova in un punto A′ dell'iperbole come qui indicata:

La grande utilità della formula per la distanza sta nel fatto che con essa abbiamo ottenuto un modo di scrivere equazioni automaticamente invarianti in tutti i sistemi di riferimento inerziali. I segmenti OA e OA' hanno dunque il medesimo valore di intervallo, anche se nel disegno sono rappresentati da segmenti di lunghezza diversa.
Il modo originale in cui Einstein si collega a questo apparato matematico costituisce argomento della relatività generale.
Alla base della relatività generale è il principio di equivalenza, cioè l'idea che un campo gravitazionale (in regioni piccole dove il campo può essere considerato uniforme) sia equivalente ad un sistema accelerato.
La teoria contiene un tale principio tramite la supposizione che il campo gravitazionale possa essere descritto nel linguaggio della geometria, sostituendo allo spaziotempo piatto uno spaziotempo curvo.
La trasformazione di un sistema da inerziale a rotante (accelerato) non lascia inalterata la formula per la distanza nel modo che preciseremo. Consideriamo il problema del moto. Quale che sia la legge di trasformazione del tempo, il lettore può facilmente verificare, mediante le trasformazioni corrispondenti ad una rotazione, che l'espressione $(dx')^2 + (dy')^2 = (\dot{x}'dt)^2 + (\dot{y}'dt)^2$ non si riduce alla forma $(dx)^2 + (dy)^2$ certamente valida nel sistema inerziale, e viceversa. (Per motivi di concisione si usa mettere un punto sopra la lettera che rappresenta una grandezza per indicare la derivata della grandezza rispetto al tempo). Per conseguenza, la formula per la distanza nel sistema accelerato non è esprimibile dal teorema di Pitagora valido in uno spazio piatto e ciò vuol dire che lo spazio assume una curvatura. Infatti, se la traiettoria di una particella libera, allorché curva nel passaggio al sistema rotante, si mantenesse in un piano, la distanza fra due punti della traiettoria infinitamente vicini dovrebbe avere lo stesso valore sia che la si misuri lungo la curva sia che la si misuri lungo la direzione dello spostamento, che è un vettore. Se così fosse, la formula corretta per la distanza nel sistema ac-

celerato sarebbe quella del teorema di Pitagora in uno spazio a due dimensioni. Le cose, invece, stanno in un modo diverso.
Il principio della relatività generale è semplice e le sue conseguenze possono essere facilmente illustrate facendo riferimento a un dato spazio curvo bidimensionale. In uno spazio curvo, un segmento di retta, cioè una geodetica, viene definito come il cammino che rende minima la distanza fra i suoi estremi (per esempio, sulla superficie bidimensionale di una sfera, la geodetica è un arco di cerchio massimo).
Si immagini ora una sfera di raggio R immersa in uno spazio piatto tridimensionale e centrata nell'origine di un sistema di assi coordinati. In ogni quadrante dato, un punto della superficie è determinato dalle sole coordinate x, y (per questo si dice che la superficie è bidimensionale) e ad ogni coppia di valori x, y corrisponde un valore di z. È evidente che un osservatore che misuri la distanza tra i punti A e B della superficie, limitandosi ad usare le due coordinate cartesiane x e y, non ricava dal teorema di Pitagora la lunghezza dell'arco di cerchio massimo fra questi due punti. Sulla superficie della sfera avremo bisogno di un teorema di Pitagora, per così dire, noneuclideo.
Lavorando con coppie di punti la cui distanza s sia infinitesima, Einstein scelse per la distanza una formula tale che la traiettoria di una particella in caduta libera o quella di un pianeta fosse una geodetica nella geometria risultante.
In realtà, la formulazione matematica della relatività generale è alquanto complicata e con mezzi elementari se ne può dare solo una vaga idea.
In un sistema di riferimento inerziale della relatività ristretta, le distanze tra punti dello spazio infinitamente vicini e gli intervalli di tempo fra eventi con coordinate spaziali corrispondenti a quei punti sono espressi da quantità infinitesime (o differenziali), e la formula per la distanza è la somma dei quadrati dei differenziali delle quattro coordinate:

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

Tale forma quadratica, in un campo gravitazionale, assume un aspetto generale del tipo: $(ds)^2 = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}(x)(dx^i)(dx^k)$

dove x^1, x^2, x^3 sono coordinate spaziali e x^4 è una coordinata temporale che può essere indicata da un orologio che segna un tempo arbitrario.
In un sistema di riferimento inerziale, le grandezze g_{ik} hanno i noti valori galileiani: $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = 1$, $g_{ik} = 0$ per i diverso da k

In un campo equivalente ad un sistema accelerato ci si riconduce di solito al modello spaziotemporale richiesto per il sistema galileiano, dal momento che è possibile ottenere, con una trasformazione delle coordinate, la riduzione delle grandezze g_{ik} ai valori galileiani in tutto lo spazio. In un campo gravitazionale reale, questa possibilità non esiste. La sola cosa che si possa ottenere, mediante la scelta di un riferimento inerziale locale, è la riduzione delle grandezze g_{ik} alla forma galileiana solo in una piccola regione, a rigore in un punto dato dello spazio.
Le grandezze $g_{ik}(x)$, chiamate componenti del tensore metrico, descrivono la deviazione dal teorema di Pitagora in uno spaziotempo curvo, cioè la deviazione della geometria dello spaziotempo rispetto alla forma piatta. Nel caso generale, ad ogni punto dello spaziotempo si associano dieci grandezze distinte (quattro con indici uguali e $4 \cdot 3/2 = 6$ con indici diversi). Tali grandezze sono quindi funzioni del punto, ossia campi nel senso usuale del termine. Per questo, la relatività generale è una teoria di campo e le equazioni di Einstein, dette equazioni del campo, stabiliscono *in che modo* la curvatura spaziotemporale dipende da una data distribuzione di materia.
Poiché non c'è un'unica maniera di scegliere le coordinate che specificano un evento, cioè quando si cambia il sistema di riferimento, si otterranno espressioni diverse per le componenti del tensore metrico. Tuttavia, un risultato fondamentale ci consente di passare dall'uno all'altro di questi insiemi di componenti mediante una legge di trasformazione. Otteniamo così la possibilità di descrivere la fisica in forma covariante, cioè indipendente dal sistema di riferimento (e valida in coordinate arbitrarie).
Naturalmente, questa circostanza non significa l'equivalenza fisica dei sistemi della relatività generale simile a quella dei sistemi inerziali della relatività ristretta.
È importante osservare che le grandezze g_{ik} dipendono sia dalle coordinate spaziali sia da quella temporale, e che proprio a causa di quest'ultima dipendenza, la geometria spaziale, in relatività generale, ha una struttura intrinsecamente dinamica. In effetti, una volta che sia stata fissata la coordinata temporale x^4, la teoria può essere espressa in una forma nella quale la variabile dinamica fondamentale è il tensore metrico, dipendente dal tempo, che descrive la geometria dello spazio tridimensionale, geometria che cambia quindi nel tempo.
Lo spaziotempo relegato al ruolo passivo di uno schermo fisso sul quale è proiettato il dramma della fisica resta un concetto valido per quei rami della fisica in cui si ha a che fare con la relatività ristretta.
Un semplice ragionamento servirà a spiegare perché le proprietà non eucli-

dee dello spazio compaiono in un sistema di riferimento non inerziale. Consideriamo due sistemi di riferimento l'uno dei quali (S) è inerziale e l'altro (S′) ruota uniformemente rispetto a S intorno all'asse comune z. Una circonferenza nel piano xy del sistema S (con centro nell'origine delle coordinate) può essere considerata anche come una circonferenza nel piano x′y′ del sistema S′. Misurando la lunghezza della circonferenza e del suo diametro con un regolo nel sistema S, otteniamo dei valori il cui rapporto è π, dato che nel sistema di riferimento inerziale la geometria è euclidea. Supponiamo ora che le misure siano eseguite con un regolo in quiete rispetto a S′. Osservando questo processo dal sistema S, troviamo che il regolo applicato tangenzialmente alla circonferenza subisce la contrazione di Lorentz, mentre resta inalterato quando è applicato radialmente. Ne segue chiaramente che il rapporto della lunghezza della circonferenza al suo diametro in S′ sarà maggiore di π.
In presenza di un campo gravitazionale variabile, la geometria dello spazio non solo sarà non-euclidea, ma varierà anche con il tempo. Ciò significa che "particelle di prova" non saranno in quiete le une rispetto alle altre, connesse rigidamente, cioè tali che le mutue distanze restino inalterate. Così, se le particelle sono disposte lungo una qualsiasi circonferenza e lungo il suo diametro, allora, poiché il rapporto della lunghezza della circonferenza al suo diametro non è uguale a π e cambia con il tempo, è chiaro che se le distanze tra le particelle lungo il diametro restano invariate, devono per forza variare le distanze tra le particelle periferiche, e viceversa.
In tal modo, l'immobilità relativa di un sistema di corpi nella relatività generale è assolutamente impossibile.
La situazione che ci si presenta è radicalmente diversa da quella che compare nei sistemi di riferimento della relatività ristretta, dove una distanza spaziale viene definita come l'intervallo fra due eventi che hanno luogo nello stesso istante, ossia ponendo semplicemente $dt = 0$ in ds.
In relatività generale, invece, sorge il problema di come, a partire da tre coordinate spaziali e una coordinata temporale arbitrarie, si possano determinare le distanze spaziali e gli intervalli di tempo reali. In questo contesto, il cammino percorso da un segnale luminoso fornisce l'interpretazione pratica del regolo e, per determinare l'elemento di distanza spaziale, non si può generalmente procedere come in relatività ristretta. Ciò è dovuto al fatto che l'intervallo di tempo proprio è legato alla coordinata temporale da una relazione che è diversa in differenti punti del campo. Il cammino percorso da un segnale luminoso tra due punti dello spazio infinitamente vicini richiede una misura del tempo fra l'emissione e il ritorno, previa immediata rifles-

sione, nello stesso punto. Non deve pertanto sfuggirci che, in relatività generale, la nozione di distanza spaziale ha, in genere, solo un significato locale. La relazione che determina il tempo proprio dt in funzione della coordinata temporale in un punto dato dello spazio si ricava immediatamente dalla formula generale per la distanza: $ds^2 = c^2dt^2 = g_{44}(x)\,(dx^4)^2$, essendo $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$.

Già nella relatività ristretta il tempo proprio misurato da un singolo orologio in moto uniforme dipende dalla velocità rispetto al sistema stazionario e, quando il moto sia accelerato, il risultato può essere descritto come se, ad ogni istante, l'orologio fosse in moto uniforme con una velocità differente.
Non è facile capire questi fenomeni in modo intuitivo. Ciò, unitamente allo sviluppo "astratto" assunto dall'argomento matematico e all'incertezza dei controlli sperimentali, ha impedito per lungo tempo lo studio della teoria gravitazionale relativistica formulata interamente da Einstein nel 1916. A questo si aggiunga il trionfo tributato alla teoria di Newton, che continua ancora a produrre i suoi effetti.
Il fatto fondamentale, in relatività generale, è che il tempo e lo spazio sono forgiati da ciò che avviene nel sistema, ovvero le proprietà geometriche dello spaziotempo sono determinate da fenomeni fisici, e non sono proprietà invariabili dello spazio e del tempo. Sorprendentemente, questa intuizione, di cui non vi è traccia nella fisica di Newton, è viva nel profondo della cultura biologica, sebbene sotto il peso di una soverchiante concezione meccanicistica dei sistemi.
Solo di recente la meccanica, al livello superiore della teoria dei quanti, tende ad abbandonare la concezione che vuole lo spazio e il tempo relegati a un ruolo passivo per timore che possano sfuggire nuove prospettive su terre sconosciute.

Le due grandi tradizioni di pensiero, quella geometrica di Galileo e quella dinamica di Newton, hanno fatto scuola per tre secoli in diverse direzioni. Einstein è l'epigono della prima, la meccanica quantistica il punto d'arrivo della seconda. Se la gravità non fosse altro che la forza newtoniana, potrebbe essere incorporata nella teoria quantistica. Il fatto è che il principio di equivalenza, con il suo requisito che la massa scompaia dal problema delle traiettoria dei gravi, è inspiegabile alla luce della teoria di Newton.
L'adesione ad un tale principio da parte della relatività generale di Einstein costituisce un solido caposaldo per quella che è considerata la descrizione moderna dei fenomeni gravitazionali. Ma tale successo è ottenuto al prezzo di accettare l'idea che la gravità sia radicalmente differente dalle altre forze classiche della natura.
La distanza tra il punto di vista relativistico e quello quantomeccanico è così grande che coloro che svolgono ricerca in questo campo hanno pensato bene di coniare la massima: "Nessuno unisca ciò che Dio ha separato". Noi ci atterremo a questa massima.
La relatività generale rappresenta una ingegnosa soluzione matematica che corona la ricerca delle conseguenze del principio di equivalenza galileiano acutamente indagato. Questa indagine ha portato Einstein a formulare un principio di equivalenza cosiddetto forte, secondo il quale nei sistemi di riferimento locali in caduta libera le leggi della meccanica sono le medesime che nei sistemi inerziali della relatività ristretta. Infatti, nei sistemi di riferimento locali in caduta libera non si rileva accelerazione sulle particelle di prova ed essi si muovono in linea retta, ma queste linee "localmente rette" corrispondono semplicemente alle geodetiche dello spaziotempo curvo.
Un argomento suggestivo a favore del principio di equivalenza forte (principio di equivalenza + relatività ristretta) è il seguente. Due orologi identici siano mantenuti in quiete ad altezze differenti in un campo gravitazionale, e la distanza L fra i due orologi sia piccola. Supporremo, inoltre, che il campo gravitazionale sia debole, in modo che una particella che in esso si trovi non acquisti una grande velocità.
Ai due orologi possono essere associati due sistemi di riferimento inerziali locali: uno a riposo rispetto a un orologio nel momento in cui parte un segnale luminoso, l'altro a riposo rispetto all'altro orologio nel momento in cui questo riceve il segnale. Naturalmente, il comportamento di un orologio

è sempre lo stesso rispetto a qualunque riferimento inerziale che sia a riposo rispetto all'orologio, ma, per la relatività ristretta, operano delle trasformazioni da un sistema ad un altro. Tra i due orologi in posizioni diverse si crea una differenza di tempo e questa differenza è riconducibile alla velocità di caduta raggiunta dal primo riferimento rispetto al secondo nel tempo che la luce impiega ad andare da un orologio all'altro. La differenza di tempo non è altro che il famoso spostamento Doppler fra i due riferimenti, noto come "spostamento spettrale gravitazionale".
Il risultato è una variazione di frequenza $\Delta\nu = \frac{gL}{c^2}\nu$, dove ν è la frequenza

sulla sorgente e gL è la differenza di potenziale gravitazionale newtoniano fra i due orologi, con g accelerazione gravitazionale locale.
Se l'osservatore si trova più in basso rispetto alla sorgente, la frequenza del segnale ricevuto è più elevata di quella emessa (spostamento verso il blu), se l'osservatore si trova più in alto la frequenza ricevuta è minore (spostamento verso il rosso). Si tratta insomma del comune effetto: un osservatore che si avvicina a un'onda vede arrivare prima le creste, in modo tale da percepire une frequenza maggiore, mentre un osservatore che si allontana da un'onda riceve una frequenza inferiore. (La velocità della luce espressa come velocità di fase dal prodotto della frequenza ν per la lunghezza d'onda λ è sempre la stessa, e lo spazio è isotropo, cioè tutte le direzioni sono equivalenti. La luce è classicamente un'onda e, quindi, le sue proprietà ondulatorie non richiedono una qualche particolare interpretazione).
Vediamo in quale modo la teoria di Newton affronta lo stesso fenomeno.
Trattando la gravità come una forza ordinaria, si attribuisce al fotone, che rappresenta una sorta di atomo di luce, una massa inerziale identica alla massa gravitazionale (in questo senso un principio di equivalenza debole è presente nel metodo di impostazione di Newton). La teoria dovrà essere integrata, oltre che dalla relazione massa-energia applicata alla luce, da idee escogitate dalla quantomeccanica. La massa è definita, dalla relazione di Einstein per una particella libera, come il rapporto fra l'energia e il quadrato della velocità della luce e l'energia sarà, dalla quantomeccanica, legata alla frequenza secondo la costante di Planck. In simboli: $m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$

Si noti che la particella nel caso in esame è immersa in un campo di forza.
Si dimostra, infine, che un fotone di una data frequenza, nel cadere da un'altezza L, acquista una frequenza, misurata dopo la caduta, più elevata, con un aumento uguale a quello calcolato mediante il procedimento relativistico. Le due teorie, dunque, muovono da approcci equivalenti sul piano

matematico, sicché è impossibile decidere, a questo livello, quale delle due sia giusta. Tuttavia le due teorie, proprio perché riconducibili a tradizioni di pensiero radicalmente diverse, non sono affatto equivalenti dal punto di vista psicologico e, quindi, un fisico teorico che valga qualcosa le tiene ambedue in mente, in modo da non precludersi la via ad ipotesi di lavoro che possano scaturire, in maniera naturale, da una scelta piuttosto che dall'altra. Diremo qualcosa di più, discutendo la teoria dei quanti, sulla profonda divergenza tra relatività generale e teoria quantistica.

Dall'esame della struttura concettuale della relatività generale (o meglio del principio di equivalenza forte che ne costituisce l'ipotesi di partenza) risulta evidente che essa rappresenta la teoria divenuta ormai classica per trattare gli effetti gravitazionali in un campo esterno. In questo caso, il termine "esterno" indica che i corpi sono troppo piccoli per contribuire in modo misurabile al campo. Così, il moto della massa che determina il campo può essere ignorato e l'accelerazione della particella di massa m in un campo esterno è indipendente da m.

La teoria quantistica, invece, è quella a doversi candidare per trattare la gravità nell'ambito microscopico, dove compare la costante di Planck.

Come si comporti la gravità su piccola scala è ancora un mistero.

Non si ha alcun diritto di affermare, come frequentemente fanno molti fisici, che a livello microscopico gli effetti della gravità sono irrilevanti, perché molto più deboli delle altre forze attive. Invero, le leggi della fisica non sono simmetriche rispetto a cambiamenti di scala, e dovremmo chiederci su quale scala di distanze potrebbe verificarsi qualcosa di interessante.

"Secondo Newton ed Einstein l'attrazione mutua tra due masse è $\propto 1/r^2$; quindi essa diventerebbe $\rightarrow \infty$ nel limite $r \rightarrow 0$... .

Forse potremmo – solo provvisoriamente – ammettere l'ipotesi che la forza effettiva eviti la spiacevole singolarità per $r \rightarrow 0$ e, senza diventare mai infinita, cresca tremendamente rispetto alla legge $1/r^2$ a distanze $\approx 10^{-13}$ cm.

So che questo è solo un povero balbettio. Ma sono troppo vecchio per elaborare nuove idee. Ho pensato di esporle a lei, che è più giovane, e potrebbe forse essere condotto in regioni inesplorate, magari di differente natura". (Dalla lettera inviata da Schrödinger, rientrato nella sua città natale, a B. Bertotti, presso l'università di Princeton, nel gennaio 1959).

Mi pare di capire che il suggerimento, o il testamento, di Schrödinger spinga nella direzione che porti ad individuare una scala in corrispondenza della quale tutte le forze, gravità inclusa, vengano ad avere la stessa intensità. La differenziazione avvenuta si presenterebbe allora come la rottura di una simmetria.

Il moto armonico
Sovrapposizione di moti armonici semplici
La costruzione di un impulso

Un approccio "realistico" al problema del moto non avrebbe mai consentito di scoprire il principio di inerzia; probabilmente avrebbe portato ad ipotizzare l'esistenza di forze in ogni tipo di moto, e lo stato di quiete sarebbe stato interpretato come dovuto a un equilibrio di forze.
Galileo affrontò il problema da matematico. Immaginando il moto di una particella in un puro vuoto euclideo, egli colse il grande principio.
In modo simile, il moto armonico semplice è un moto idealizzato, perché un tale moto dura per un tempo indefinito e non si fanno intervenire forze esterne. Esso costituisce una buona approssimazione a molti processi fisici e consente di rappresentare processi più complicati in termini di sovrapposizione di moti armonici semplici.
Quando il moto avviene attorno a una posizione di equilibrio fissa nello spazio, parliamo di oscillazioni e modi stazionari; quando l'oscillazione viaggia da un punto all'altro dello spazio, parliamo di onde e propagazione.
Si vuole, per ora, che l'immagine che si formi nella mente del lettore sia quella di oscillazioni stazionarie.
Consideriamo una particella che si muova lungo l'asse x e che sia legata all'origine da una forza elastica di richiamo. Se la particella è spostata dalla sua posizione di equilibrio nell'origine a una certa posizione rappresentata dall'ascissa x, essa verrà richiamata dalla forza verso la sua posizione di equilibrio, con una intensità che supporremo proporzionale allo spostamento x. Poiché la forza è diretta verso l'origine, essa sarà espressa da $-kx$, dove k è una costante di proporzionalità.
Abbiamo supposto che la forza dipenda in modo lineare dallo spostamento, cioè che l'effetto sia proporzionale alla causa. L'attrito è escluso dal problema, e non agiscono forze esterne.
Allora la forza in ogni istante sarà data dalla legge di Newton:

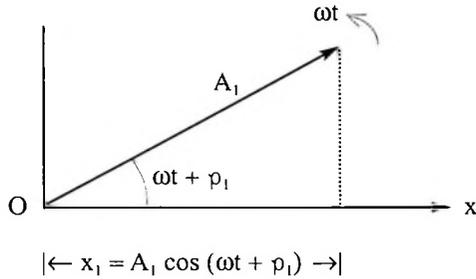
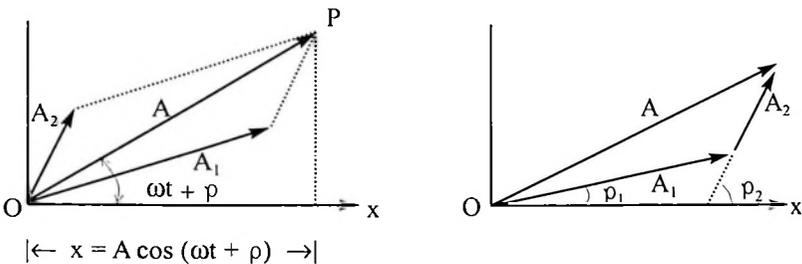
$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = -kx(t)$, che può essere riscritta nella forma:

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, dove $\omega^2 = k/m$ (si osservi che ω^2 ha il significato fisico di una forza di richiamo per unità di spostamento e per unità di massa).
L'equazione ammette soluzioni del tipo $x = \cos\omega t$ e $x = \operatorname{sen}\omega t$, come è facile

provare per sostituzione diretta risolvendo le derivate.
(Il problema trattato è simile a quello del pendolo. Quando sia presente l'attrito, l'oscillazione è smorzata. Se è presente anche una forza esterna, l'oscillazione è forzata. La frequenza dell'oscillazione forzata è quella della forza eccitatrice, mentre l'intensità di risposta espressa dall'energia di vibrazione dipende dalla frequenza, con un massimo in corrispondenza della frequenza di risonanza, che è uguale alla frequenza propria dell'oscillatore non smorzato).
La soluzione per il moto di una particella attorno ad una posizione di equilibrio può essere scritta come un'oscillazione armonica della forma generale $x(t) = A\cos(\omega t + \rho)$. Nell'equazione non è introdotta l'informazione circa una qualche velocità di fase, né è incorporata quel po' di informazione che si può ottenere dalle condizioni al contorno, nei sistemi chiusi, che obbligano l'oscillazione ad adattarsi alla regione accessibile. Non esiste nulla di intrinseco all'equazione che dia la preferenza a uno qualsiasi dei modi stazionari di un sistema rispetto ad un altro, né alcunché che vieti di pensare e costruire moti complessi mediante la sovrapposizione di semplici termini lineari.
Infatti, il contributo di Fourier è stato formulato come un teorema di matematica pura. Il teorema dice semplicemente che una funzione periodica è la somma di semplici termini della forma:

$$A_1\text{sen}\omega t + A_2\text{sen}2\omega t + \ldots + A_n\text{sen}n\omega t$$
$$+B_0 + B_1\cos\omega t + B_2\cos 2\omega t + \ldots + B_n\cos n\omega t$$

dove la frequenza più bassa ω è detta fondamentale e i suoi multipli interi sono le armoniche.
L'analisi di Fourier si applica anche al caso di funzioni non periodiche, passando dalla somma all'integrale. (Nel caso non periodico, la funzione, o la curva, viene inscritta artificialmente in un periodo $T = 2\pi/\omega$ grande ad arbitrio. Quando si vede che non c'è componente della funzione che vari tanto lentamente quanto una oscillazione di frequenza data dai primi termini della somma, questi termini, diciamo i primi diecimila ω, 2ω, 3ω,..., possono essere ignorati. Allora, n è molto grande e ω è molto piccola. In queste condizioni, un cambiamento in n di una unità produce solamente una variazione trascurabile in $n\omega$, cosicché la variabile $n\omega$ può essere pensata come continua).
Cercheremo ora di realizzare, per così dire, una composizione di Fourier limitata al caso non periodico. Per descrivere il moto armonico semplice possiamo servirci del metodo dei "vettori" rotanti. Con questo metodo si

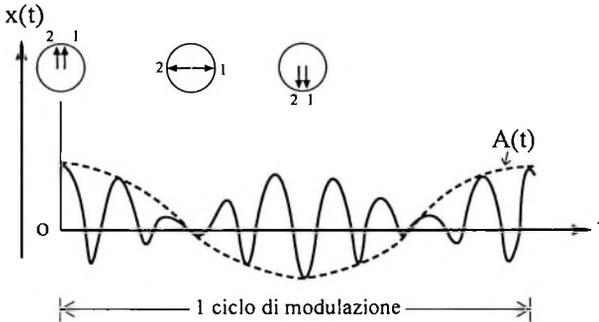
visualizzano le fasi p, che nei processi di interferenza giuocano un ruolo essenziale, anche se non sono direttamente osservabili.

Come illustrato nella figura, l'ampiezza A_1 di un oscillatore è data dal vettore polare di lunghezza A_1 che forma con l'asse x un angolo $(\omega t + p_1)$. La proiezione di questo vettore sull'asse x rappresenta l'oscillazione armonica semplice $x_1 = A_1\cos(\omega t + p_1)$. La fase p_1 corrisponde alla scelta dell'istante iniziale. Con il trascorrere del tempo il vettore ruota in senso antiorario attorno all'origine O.
Se aggiungiamo una seconda oscillazione $x_2 = A_2\cos(\omega t + p_2)$, a questa possiamo associare un altro vettore rotante.
Poiché la frequenza angolare ω è la stessa per entrambe le oscillazioni, i due vettori ruotano insieme mantenendo la medesima posizione relativa.

La somma $x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + p)$ è definita dalla proiezione sull'asse x del vettore OP ottenuto mediante la regola del parallelogramma. Senza perdere di generalità, la sovrapposizione può essere effettuata al tempo $t = 0$. Dunque, l'ampiezza dell'oscillazione risultante non dipende solo dalle

ampiezze dei singoli contributi, ma anche dalla differenza $\rho_2 - \rho_1$ delle loro fasi.
È evidente che il metodo grafico può estendersi a più contributi sovrapposti e al caso notevole in cui le frequenze dei singoli contributi siano diverse. Non otterremo più un moto armonico semplice. Consideriamo due oscillazioni di frequenza leggermente diversa, ma, per semplicità, con la stessa ampiezza e fasi zero:
$x_1(t) = A\cos\omega_1 t$
$x_2(t) = A\cos\omega_2 t$, dove $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ ha un valore positivo.

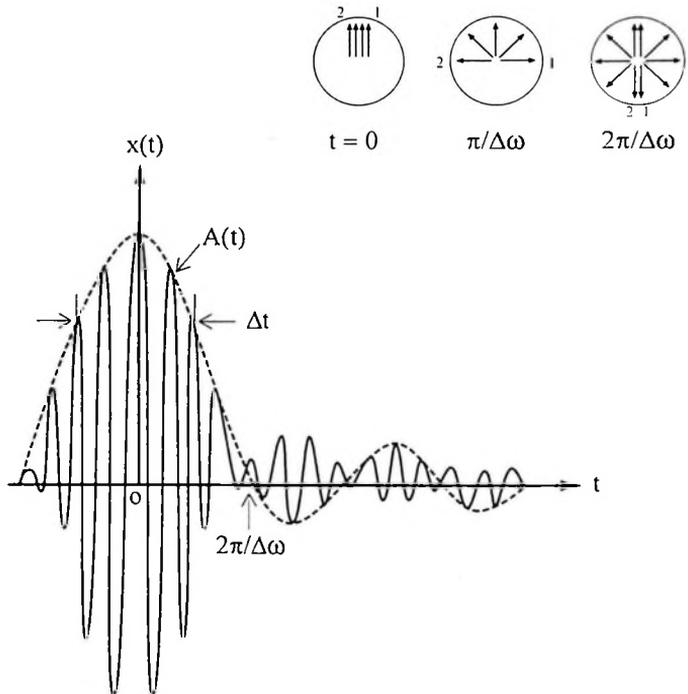
Si immagini di eseguire delle istantanee stroboscopiche dei vettori rotanti e la frequenza dello stroboscopio sia $\omega_s = \omega_{media} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$.
L'intervallo di tempo fra le istantanee corrisponde al periodo dello stroboscopio e ogni istantanea coglierà il vettore che ha $\omega = \omega_{media}$ sempre nella direzione x.
Allora il vettore di frequenza ω_2 apparirà ruotare lentamente in senso progressivo (antiorario) alla frequenza positiva $\omega_2 - \omega_s = \frac{1}{2}\Delta\omega$, mentre il vettore di frequenza ω_1 apparirà ruotare lentamente in senso retrogrado (orario) alla frequenza negativa $\omega_1 - \omega_s = \frac{1}{2}\Delta\omega$.
Nell'istante $t = 0$, i due contributi vettoriali sono in fase e diretti secondo l'asse x positivo. L'ampiezza della sovrapposizione è uguale a 2A.
Dal momento che la posizione di un vettore rotante, come appare rispetto alla direzione x, è data da $\frac{1}{2}\Delta\omega t$, dopo un tempo $t = \pi/\Delta\omega$ i contributi sono aperti di 180° e si trovano in opposizione di fase, cioè vengono colti dall'istantanea stroboscopica orientati perpendicolarmente all'asse x e in versi opposti.
Dopo un tempo $t = 2\pi/\Delta\omega$ ritornano in fase, cioè sono colti dall'istantanea stroboscopica orientati secondo l'asse x negativo. Ora l'ampiezza è – 2A.
Il tempo $2\pi/\Delta\omega$ indica il periodo di un battimento fra le due frequenze.
Si osservi che il periodo di un battimento va da un massimo ad un minimo. In realtà, è la grandezza che dipende dal quadrato dell'ampiezza ad avere il significato fisico di una intensità e pertanto un rivelatore, come il complesso orecchio-cervello, non distinguerà i valori positivi dell'ampiezza da quelli negativi. La frequenza di un battimento $\Delta\omega$, come qui definita, è il doppio della frequenza definita in modo usuale.
L'oscillazione veloce che ha $\omega = \omega_{media}$ appare immobile. Soltanto l'ampiezza A(t) varia lentamente fra le istantanee, con una frequenza di modulazione pari alla metà della frequenza di battimento, ossia $\omega_{mod} = \frac{1}{2}\Delta\omega$.

L'oscillazione risultante presenta, pertanto, una singola frequenza angolare media veloce e un'ampiezza lentamente variabile sulla scala dei tempi dell'oscillazione veloce. Una tale oscillazione viene chiamata quasi-armonica.

$$x(t) = 2A\cos\omega_{mod} t \cdot \cos\omega_{media} t$$

ampiezza lentamente variabile	termine rapidamente oscillante

Sono indicati con frecce di lunghezza A i contributi 1 e 2 di frequenza leggermente diversa (quasi identica). Il periodo di un battimento comprende molti periodi dello stroboscopio. Nella figura, la frequenza di battimento è 1/4 della frequenza media. Se il periodo di battimento non fosse esattamente un multiplo del periodo dell'oscillazione veloce, i due contributi, quando ritornano in fase, sarebbero colti prima dell'istantanea o dopo non esattamente orientati secondo l'asse x negativo. Allora l'ampiezza dell'oscillazione risultante sarebbe uguale a $-2A$ (come previsto), ma non lo spostamento x(t) [diversamente da come indicato nella figura].

Siamo ora in grado di costruire un impulso.
Consideriamo la sovrapposizione di N oscillazioni, tutte con la stessa ampiezza e fase zero, appartenenti alla banda di frequenze di larghezza finita $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Le frequenze sono distribuite con uniformità fra ω_1 e ω_2.
Nell'istante $t = 0$, l'ampiezza della sovrapposizione è NA.
Con il passare del tempo, i contributi vettoriali si aprono a ventaglio e dopo un tempo $2\pi/\Delta\omega$, che corrisponde al periodo di battimento fra le frequenze estreme ω_2 e ω_1, l'ampiezza è zero, perché i contributi sono distribuiti uniformemente in fase su un'intera circonferenza e si elidono a vicenda (l'ampiezza è esattamente zero per $N \to \infty$).
Per molto tempo dopo $t = 2\pi/\Delta\omega$, i contributi saranno ancora distribuiti ampiamente in fase, seppure in modo non uniforme, e quindi l'ampiezza

A(t) resta piccola per un tempo indefinito. I vettori raggiungono di nuovo tutti la stessa fase, e A(t) riacquista il suo valore iniziale NA, soltanto quando i contributi di frequenze adiacenti ritornano in fase. Poiché le frequenze dei contributi adiacenti sono separate da un intervallo pari a $\Delta\omega/(N-1)$, il periodo di battimento fra frequenze adiacenti è $(N-1)2\pi/\Delta\omega$.
Quindi, se $N \to \infty$, l'ampiezza A(t) resta piccola per un tempo indefinito, e non riacquista più il suo valore iniziale. Si è ottenuto in tal modo un impulso, cioè una funzione non periodica che è significativamente diversa da zero soltanto durante un limitato intervallo di tempo. L'impulso presenta una opportuna frequenza angolare media, centrata nella banda $\Delta\omega$, e un'ampiezza lentamente variabile sulla scala dei tempi delle oscillazioni veloci. La dipendenza dell'ampiezza A(t) dal tempo può essere congetturata in modo qualitativo.

La parte simmetrica di impulso per $t < 0$ è stata ottenuta con una operazione di inversione temporale. Come durata Δt, nel corso della quale l'ampiezza è relativamente grande, si assume la metà dell'intervallo di tempo fra i due istanti nei quali l'ampiezza è zero. Si è così sicuri che, all'esterno di questo intervallo di tempo, l'ampiezza non recupera mai.
In simboli $\Delta t = 2\pi/\Delta\omega$.
Questa relazione ricorda le relazioni di indeterminazione che compaiono nella quantomeccanica. È solo un'analogia (che pur si rivelerà importante), giacché una relazione di indeterminazione, nel contesto della meccanica classica, non può essere neppure formulata.
Una relazione identica è stata ricavata, mediante uno studio di oscillazioni mascherato, discutendo la rottura di una simmetria.

Onde progressive in una dimensione
Il significato classico delle grandezze
che dipendono dal quadrato dell'ampiezza dell'onda

L'esempio più familiare e semplice di onde progressive è fornito dalle onde elastiche che si propagano lungo una corda estesa orizzontalmente quando se ne muove velocemente un capo su e giù.
Ignoreremo la struttura molecolare della materia e penseremo al mezzo omogeneo (simmetrico per traslazioni) e continuo.
Supponiamo, quindi, di avere un sistema unidimensionale costituito da una corda flessibile, estesa da $x = 0$ all'infinito. La forza eccitatrice in $x = 0$ sposta la parte mobile all'origine O secondo una direzione perpendicolare a x.
Se indichiamo con $f(0, t')$ lo spostamento all'origine O e ipotizziamo che il moto sia armonico, possiamo scrivere: $f(0, t') = A\cos\omega t'$.
Si vuole trovare lo spostamento $f(x, t)$ di una parte mobile della corda alla distanza arbitraria x dall'origine O.
Dall'esperienza comune di osservare le onde del mare o sull'acqua, siamo abbastanza sicuri di due cose: le onde si propagano senza cambiare la loro forma e quel che accade nella posizione x all'istante t è la ripetizione di quanto accaduto in $x = 0$ ad un istante precedente t′, dove t′ precede t del tempo che la perturbazione impiega per percorrere la distanza x. Allora, se v è la velocità di fase (la velocità con la quale si propaga un dato valore della perturbazione, diciamo la cresta):
$t' = t - x/v$

e inoltre

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f(0, t') \\ &= A\cos\omega t' \\ &= A\cos\omega(t - x/v) \\ &= A\cos(\omega t - Kx), \quad \text{dove} \quad v = \omega/K = \nu\lambda \end{aligned}$$

La frequenza angolare ω è il reciproco del periodo moltiplicato per 2π (ovvero $\omega = 2\pi/T$) e K è il numero d'onde angolare definito come il reciproco della lunghezza d'onda moltiplicato per 2π (ovvero $K = 2\pi/\lambda$).
K è la quantità per le oscillazioni nello spazio analoga alla frequenza angolare ω per le oscillazioni nel tempo, esattamente come la lunghezza d'onda è l'equivalente spaziale del periodo.

La relazione fra ω e K è chiamata relazione di dispersione.
Le onde che soddisfano la semplice relazione ω/K = costante prendono il nome di "onde non-dispersive". Quando ω/K dipende dalla frequenza, le onde sono chiamate "dispersive". In quest'ultimo caso conviene costruire un grafico di ω in funzione di K.
Effettivamente, il primo obiettivo nella risoluzione dei problemi in cui interviene la propagazione per onde è quello di trovare la velocità di fase e quindi la relazione di dispersione, che sarà specifica per i sistemi in istudio, per esempio le onde che viaggiano lungo una corda, le onde sonore, la luce nel vuoto.
La frequenza di un'onda che avanza lungo una corda sarà quella della forza eccitatrice. La relazione di dispersione per una corda perfettamente flessibile è ω/K = costante e il grafico corrispondente è semplicemente una linea retta. Nella realtà, le parti mobili adiacenti di una corda sono costituite da molecole e non sono affatto indipendenti l'una dall'altra. I modi superiori della corda (un sistema meccanico) hanno lunghezze d'onda più corte e quindi sono più piegati. La rigidezza è perciò più importante per i modi superiori rispetto a quelli inferiori, e quindi una diminuzione nella lunghezza d'onda non produce un aumento proporzionale nella frequenza, bensì lievemente maggiore di quanto è previsto sulla base del modello di una corda perfettamente flessibile (si ricordi il significato di ω^2).
Il grafico che rappresenta ω in funzione di K non sarà più una retta e la velocità di fase tenderà ad aumentare con la frequenza.
Naturalmente, per i battimenti (e per gli impulsi in generale) il discorso diventa più complesso.
Quando abbiamo discusso i battimenti, non abbiamo introdotto alcuna informazione circa la velocità di fase. Se la velocità di fase dipende dalla frequenza, i due contributi armonici semplici viaggiano a velocità lievemente diverse, seppure quasi uguali. In questa condizione, la velocità media di fase (relativa alla propagazione della fase dell'onda risultante) è diversa dalla velocità di *gruppo* (relativa alla propagazione dell'ampiezza di modulazione, che corrisponde essa stessa a un'onda in moto ad una velocità che viene interpretata come la velocità con la quale si trasmette un'informazione o il segnale).
La musica viaggia alla velocità di gruppo. Anche la luce viaggia alla velocità di gruppo. Nel vuoto, dove la velocità della luce non dipende dalla frequenza, la velocità di fase è identica alla velocità di gruppo, ma, nei mezzi dispersivi, i due termini differiscono.
Tutto ciò crea non poche difficoltà, che andranno chiarite da analisi partico-

lareggiate. L'importante è capire che quel che si propaga è una perturbazione e non le particelle, le quali vibrano linearmente rispetto a una posizione di equilibrio fissa nello spazio o, come accade sulla superficie dei liquidi, descrivono moti circolari (l'ellisse è un caso particolare del cerchio) senza una traslazione netta, eccetto nel caso in cui l'onda frange in prossimità di una spiaggia.

A dire il vero, in un'onda progressiva longitudinale costituita da una singola pressione che si propaghi, per esempio, su una molla (la configurazione di equilibrio è quella di una molla compressa tendente ad allungarsi), una particella, evidenziata contrassegnando una spira della molla, compie una traslazione lungo la direzione della molla (e lungo la direzione di propagazione dell'onda), ma la velocità di questo moto di traslazione non deve essere confusa con la velocità dell'onda di pressione, che è una costante specifica della molla ed è più grande della velocità media della particella. Infatti, se ora immaginiamo un'onda costituita da una singola compressione e da una singola rarefazione, quando la particella è richiamata verso la posizione iniziale di equilibrio dalla rarefazione, la semionda di compressione l'ha già sorpassata.

Lo studio delle onde è un campo vasto e sorprendente. Noi ci occuperemo soltanto delle vibrazioni trasversali della corda, con qualche accenno, importante per la comprensione dell'argomento quantistico, alla radiazione elettromagnetica.

La distinzione fatta fra onde e particelle del mezzo in cui le onde si propagano introduce una semplificazione essenziale: pur potendo le onde nei sistemi materiali essere spiegate completamente per mezzo delle particelle "reali" (le onde elastiche su una corda sono moti collettivi di molecole), l'oggetto dello studio delle onde è costituito dalla funzione $f(x, t)$, che è formalmente invariante rispetto a una grande varietà di processi fisici. Potrebbe rappresentare uno dei campi associati a un'onda piana elettromagnetica. Perciò, quando si tratti di descrivere un'onda, può non suscitare alcun interesse considerare il mezzo di propagazione e chiedersi che cosa oscilli in realtà. La totale mancanza di interesse per il supporto delle onde viene indicata con il termine "vuoto". Quel che si vuole è formulare *equazioni d'onda*, per mezzo delle quali si possano predire fenomeni osservabili sperimentalmente.

Su una corda, lo spostamento $f(x, t)$ in t fisso, cioè in una istantanea, varia in modo sinusoidale da punto a punto rispetto all'asse x di equilibrio, mentre l'ampiezza dell'onda è una costante. Ciò vuol dire che l'intensità, che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda, è costante. L'intensità I

è una misura dell'energia trasportata dall'onda nell'unità di tempo (attraverso una sezione unitaria) ed è uguale alla densità energetica moltiplicata per la velocità dell'onda. Nel nostro caso, dato che stiamo lavorando in uno spazio unidimensionale, l'energia presente in una regione Δx (nella parte mobile della corda con configurazione di equilibrio Δx su un intorno di x) è definita da ΔE e la densità energetica da $\Delta E/\Delta x$.

In simboli: $I = \frac{\Delta E}{\Delta x} v$ dove v è la velocità dell'onda.

Se l'ampiezza dell'onda non varia (la velocità di propagazione resta sempre la stessa), la densità con la quale l'energia si distribuisce nello spazio, ossia lungo la direzione coordinata x, dovrà essere uniforme esattamente come può esserlo una densità di massa. Si noti che la densità energetica moltiplicata per Δx fornisce l'energia presente nella regione considerata. Se pensiamo la densità energetica come una variabile continua proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda (ampiezza che può anche essere, a differenza del caso esposto, funzione di x), la densità energetica integrata su una regione estesa fornirà l'energia presente in questa regione.
Abbiamo interpretato la funzione $f(x, t)$, tramite il significato attribuito alle grandezze che dipendono dal quadrato dell'ampiezza, come campo, che è un concetto potente che ci consente di descrivere le leggi che governano il trasferimento di energia da un punto all'altro dello spazio. Un tale concetto viene introdotto da Maxwell e farà grande la fisica dell'Ottocento.
Le singole parti mobili della corda, che vengono via via interessate dalla perturbazione, eseguono tutte lo stesso moto armonico, cioè oscillano attorno alla posizione di equilibrio x fissa, con fasi diverse, secondo una direzione trasversale alla direzione di propagazione dell'onda e possiedono, ad ogni istante, la stessa energia totale, cinetica e potenziale.
Se ricordiamo che l'energia ΔE di un oscillatore armonico di massa Δm (e densità $\Delta m/\Delta x$) è uguale a $\frac{1}{2}\Delta m\omega^2 A^2$, calcoliamo immediatamente il valore dell'intensità dell'onda.
È lecito ritenere che la trasmissione dell'energia lungo la corda avvenga da un elemento al successivo. All'interno del sistema, l'energia che effluisce da una parte mobile per effetto della trasmissione all'elemento a valle sarà reintegrata dall'elemento a monte, che a sua volta è a valle rispetto all'elemento che precede. Si può risalire fino all'estremo della corda, che viene eccitato trasversalmente dalla forza armonica esercitata da un trasmettitore. La velocità istantanea con cui è eseguito il lavoro dalla forza eccitatrice,

cioè la potenza istantanea, mediata nel tempo (dopo il tempo di un ciclo ogni cosa si ripete), può essere interpretata come il flusso di energia cui corrisponde l'intensità dell'onda. In effetti qui stiamo considerando una lunga serie di oscillazioni nell'estremo della corda e ciò che interessa è il valore medio dell'energia, che la corda assorbe dal trasmettitore, su un certo intervallo di tempo t, che comprende molti cicli. In un punto a valle dell'estremo della corda, il flusso medio è dato dalla densità energetica mediata nel tempo moltiplicata per la velocità dell'onda. È facilmente intuibile che il calcolo del flusso medio fornirà l'intensità vera in modo esatto dell'onda.
I fatti dinamici esposti possono apparentemente complicare la semplice immagine della trasmissione dell'energia suggerita al lettore fin dapprincipio, e ricavata dallo studio dell'equazione d'onda integrato dal significato attribuito all'ampiezza. Partendo dall'osservazione che ogni punto sulla corda è soggetto allo stesso moto armonico, in istanti successivi, e che l'energia totale è una costante del moto, il problema del flusso lungo la corda può essere trattato senza far mai comparire il termine "medio". La trasmissione di energia da un elemento al successivo può essere pensata semplicemente come una traslazione alla velocità dell'onda dell'energia presente in un elemento.
Finora abbiamo considerato il caso di un'onda che si propaga su una corda lungo la direzione coordinata x, cioè in uno spazio unidimensionale.
Un'onda con fronte d'onda piano (onda piana) è riconducibile al caso unidimensionale, dal momento che il punto x = costante indica un piano perpendicolare alla direzione di propagazione costituito dall'insieme dei punti che vibrano in concordanza di fase e con la stessa energia. Anche un'onda con fronte d'onda circolare o, in tre dimensioni, sferico è riconducibile, a grande distanza dalla sorgente, a un problema di geometria piatta (per quanto riguarda la forma del fronte) e, in ultima analisi, al caso unidimensionale.
Nelle onde che si propagano nello spazio a tre dimensioni, l'energia trasportata si ripartisce su superfici via via più estese e l'intensità, proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda, varia in ragione inversa del quadrato della distanza r dalla sorgente ($I \propto 1/r^2$), per questioni puramente geometriche. È questa una caratteristica fondamentale dei campi "reali", gravità inclusa.
Nei problemi reali, bisogna decidere la scala di distanze sulla quale operare, cioè bisogna specificare il termine "grande" attribuito a r. È intuitivo che parlare di una distanza grande dalla sorgente è un concetto relativo alle dimensioni della sorgente. Se la sorgente è una lampada che emette luce, r grande potrà essere 100 metri. Se si tratta di una stella, r grande potrà essere una qualche frazione di anno luce.

Per capire più a fondo la cosa, possiamo utilizzare una ipotetica mappa sferica dell'universo. Alcuni punti sulla superficie della mappa possono essere contrassegnati incorporando una pallina colorata. Se l'universo a cui facciamo riferimento si espande in un modo da poter essere rappresentato dalla stessa mappa, le mutue distanze tra palline colorate si conservano, cioè la densità si mantiene uniforme, ma non è costante perché aumenta il fattore di scala della mappa. Quel che ora vogliamo è che le due situazioni considerate (che corrispondono a due universi: l'uno, quello intorno alla stella, visto come il prodotto dell'espansione dell'altro, quello intorno alla lampada) siano indistinguibili per la densità con cui l'energia si ripartisce sulla superficie che costituisce il fronte d'onda, nonostante il cambiamento del fattore di scala della mappa. È evidente che, con il fattore di scala, dovremo aumentare anche la potenza della sorgente e, quindi, l'intensità attraverso la superficie della sfera. Per una sorgente di luce ordinaria, senza entrare nei dettagli del meccanismo di irradiazione degli atomi, l'irradiazione è un processo casuale, sicché, su base statistica, possiamo escludere fenomeni di interferenza dovuti a più atomi che irradiano. In altri termini, si sommano le intensità e non le ampiezze delle singole onde. Se teniamo conto del fatto che una sorgente è un agglomerato di atomi che irradiano, ciascuno occupante una regione di dimensione finita, l'aumento della potenza della sorgente è correlato ad un aumento della dimensione. Nella realizzazione di una mappa, che è una rappresentazione intrinsecamente legata alla geometria, si ignorano completamente i processi fisici dovuti all'aumento della dimensione della sorgente e, data la simmetria sferica della sorgente, questa viene immaginata sempre come concentrata in un punto.
Potrebbe sembrare che l'universo costituito da un singolo atomo che irradia sia una sorta di archetipo di tutte le mappe. In realtà, un tale universo richiederà una trattazione molto particolare, appropriata alla situazione microscopica.
Nelle onde progressive in tre dimensioni, a grande distanza dalla sorgente non ci si accorge più della curvatura della superficie sferica, che costituisce il fronte d'onda, e da quel punto in poi l'onda si propaga nello spazio con intensità costante e, quindi, l'energia si distribuisce con densità uniforme e costante. Ora il fronte d'onda è supposto piano.
Se osserviamo un'onda piana riconducibile al caso unidimensionale di un'onda su una corda, tutti gli oscillatori definiti arbitrariamente all'interno del sistema sono indistinguibili per l'ampiezza del loro moto (e quindi per il loro contenuto energetico) e la conoscenza dello stato di uno di essi è sufficiente per conoscere lo stato di tutti, indipendentemente dalla loro fase la cui evoluzione non è influenzata dalla direzione del tempo. La conclusione che

se ne trae è che il sistema, supposto illimitato, è invariante per traslazioni.
Per un osservatore minuscolo occupare una posizione o un'altra di un tale sistema non fa alcuna differenza: l'idea della sorgente è perduta e non esisterà più un dove o un quando.
Siamo ora in grado di citare per intero l'affermazione che G. Bruno pronunciò con esultanza prima dell'avvento della severa Inquisizione: "Possiamo affermare con certezza che l'universo è tutto esso centro, o che il centro dell'universo sta dappertutto e la sua circonferenza in nessun luogo".
Pascal, commentando questa stessa immagine di una sfera infinita, scriverà la parola *effroyable* (spaventosa).
L'energia è presente, la stessa, ovunque come l'immagine riflessa in un labirinto di specchi. Pascal, forse, vide se stesso replicato da questi specchi una, mille, innumerevoli volte. Provò un senso di vertigine e di smarrimento. Laddove Bruno aveva esultato, il francese arretrò con paura.
Per quegli uomini, l'immagine della sfera infinita è una metafora della divinità.
Idee simili a quelle considerate, liberate dall'originale involucro simbolico, sono, come si vedrà, alla base del carattere elusivo della fisica quantistica circa una qualunque domanda sulla posizione della particella di energia e renderanno necessario il ricorso ad argomentazioni probabilistiche. Una disciplina nata dal gioco d'azzardo, la statistica, alla quale un medico scapestrato, G. Cardano (1501-1576), dette un contributo iniziale decisivo, verrà chiamata in campo per cercare di dominare una situazione dai profili tanto incerti e verrà elevata al rango delle più qualificate conoscenze.
"Forse la storia universale – scrive J. L. Borges – è la storia della diversa intonazione di alcune metafore."
Oltre all'energia, la cui quantità in una data regione è regolata dall'ampiezza dell'onda, le onde trasportano anche quantità di moto. Quando si sottrae energia ad una radiazione elettromagnetica si sottrae anche quantità di moto (nella direzione di propagazione dell'onda), per cui la radiazione esercita una spinta sulle cose che la riflettono o l'assorbono. Ciò ricorda la pressione delle onde sonore (onde progressive longitudinali), anche se il meccanismo operante è diverso.
Nello studio delle onde, la comprensione del significato attribuito all'ampiezza dell'onda è fondamentale.
Per le onde stazionarie, che discuteremo fra breve, l'ampiezza varia da punto a punto rispetto alla configurazione di equilibrio.
Per un impulso, che abbiamo descritto come un pacchetto d'onde di durata finita e quindi di lunghezza limitata lungo la direzione coordinata x, l'ampiezza varia lungo la direzione coordinata.

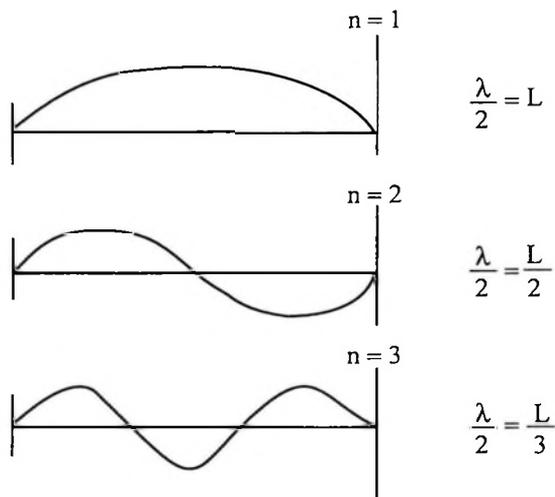
ONDE STAZIONARIE IN UNA DIMENSIONE
LE CONDIZIONI AL CONTORNO

Su una corda estesa da $x = 0$ all'infinito, l'onda eccitata avanza sempre con una successione di nodi e ventri che giocano a rincorrersi come in una danza. Una configurazione assai diversa si verifica quando l'onda si riflette ad una estremità fissa.
Immaginiamo una situazione in cui un'onda trasversale incidente sia in moto verso sinistra (nella direzione delle x negative).
L'onda avente equazione $A_1\text{sen}(\omega t + Kx)$ si riflette in $x = 0$, producendo una nuova onda che si propaga verso destra con equazione $A'_1\text{sen}(\omega t - Kx)$.
Lo spostamento in un punto qualsiasi della corda è il risultato della sovrapposizione o interferenza delle due onde, cioè:
$f\,(x, t) = A_1\text{sen}(\omega t - Kx) + A'_1\text{sen}(\omega t - Kx)$.
In $x = 0$ abbiamo: $f(0, t) = (A_1+A'_1)\ \text{sen}\omega t$.
Ma, in $x = 0$ l'estremo della corda è fisso e ciò impone al problema la condizione $f(0, t) = 0$ ad ogni istante, ovvero $A'_1 = - A_1$.
In altri termini, l'onda subisce un cambiamento di fase di π nel punto in cui si riflette e l'equazione che descrive l'effetto di interferenza sulla corda diventa: $f(x, t) = A_1\ [\text{sen}(\omega t+Kx) - \text{sen}(\omega t - Kx)]$.

Ricordando la relazione trigonometrica:
$\text{sen}a - \text{sen}b = 2\text{sen}\ ^1/_2(a - b) \cdot \cos\ ^1/_2\ (a+b)$, otteniamo:
$f(x, t\,) = 2A_1\text{sen}Kx\cos\omega t$

L'espressione $\omega t \pm Kx$, che introduce l'informazione della velocità di fase, non compare più e l'equazione soprascritta rappresenta un'onda stazionaria che non va da nessuna parte. Di fatto essa persiste nello stato stazionario e ondulatorio come un grande oscillatore armonico "distribuito", la cui ampiezza varia lungo la corda, ma è costante per ciascun punto, secondo la relazione $2A_1\text{sen}Kx$.
L'ampiezza è nulla per $Kx = n\pi$, dove n è un numero intero.
Ora imponiamo al problema una seconda condizione: che il punto di ascissa $x = L$, che può essere l'altra estremità della corda, sia anch'esso fisso, cioè rappresenti un nodo.
Ciò limita automaticamente il numero d'onde (e la lunghezza d'onda) ai

valori che possono adattarsi al sistema chiuso.

In simboli: $K = \frac{n\pi}{L}$, ovvero $\lambda = \frac{2L}{n}$

Modi di una corda continua ed elastica (una *molla* di lunghezza L) con entrambe le estremità fisse al tempo t = 0.

Le condizioni al contorno costituiscono una condizione di quantizzazione, nel senso che le lunghezze d'onda, e quindi le frequenze, sono quantizzate.

Nel contesto della fisica classica, la comparsa del numero quantico n non implica che le grandezze fisiche come la quantità di moto o l'energia delle singole particelle assumano valori discreti; e non è più sorprendente del fatto, noto fin dall'antichità, che una canna d'organo emetta suoni di frequenze discrete, che possono essere poste in corrispondenza a numeri interi (fondamentale, prima armonica e così via).

Non è stata formulata alcuna idea o principio che consenta di trattare un modo come una sorta di particella. Vedremo, discutendo il problema del campo, che la matematica offre questa possibilità e, non appena certi fatti sperimentali lo suggeriranno, questa sarà la scelta critica operata dalla fisica.

Il Campo
La struttura concettuale dell'ipotesi dei quanti

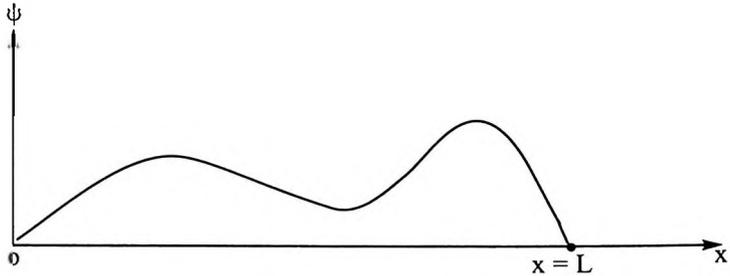
Nella meccanica di Newton, la legge del moto si applica ad una particella che si muove in tre dimensioni, soggetta ad una forza (e ad un insieme di particelle che si muovono sotto l'influenza delle forze esterne e delle loro interazioni reciproche).
Riscrivo l'equazione del moto di una particella, rendendo esplicita la struttura causale:

[1] $$m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$$

[2] $$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \frac{1}{m}\mathbf{p}(t)$$

[3] $$\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$$

La posizione indicata dal vettore **x** e la quantità di moto **p** sono viste come variabili indipendenti l'una dall'altra. Ciascun stato del sistema è rappresentato mediante una coppia di vettori (**x**, **p**) e lo "spazio degli stati" mediante l'insieme di tutte le coppie di vettori.
Classicamente lo stato di una sola particella che si muove in tre dimensioni è descritto dalle tre coordinate di posizione x, y, z e dalle corrispondenti componenti della quantità di moto p_x, p_y, p_z. Se si considera il caso semplice di una particella in moto in una dimensione, la completa descrizione dello stato si ottiene riportando la singola coordinata di posizione su un asse e la corrispondente quantità di moto su un asse ortogonale rispetto al primo. Ogni stato è così rappresentato da un punto nello spazio degli stati, e viceversa; una successione di stati definisce l'evoluzione del sistema che sarà una curva o una traiettoria contenuta in questo spazio.
La visualizzazione simultanea delle posizioni e delle velocità costituisce un vantaggio rispetto alla descrizione usuale, nella quale si riportano in grafico soltanto le posizioni (lo spazio delle variabili di stato è introdotto, di norma, dalla fisica statistica e viene chiamato "spazio delle fasi").
Lo spazio degli stati, nel caso di N particelle in moto in una dimensione, ha dimensione 2N, perché tale è il numero delle coordinate indipendenti neces-

sarie per descrivere il sistema a N particelle. Nel caso di N particelle che si muovono in tre dimensioni, lo spazio degli stati avrà dimensione 6N.
Benché possa non essere facile visualizzare spazi del genere, il lettore sarà d'accordo che c'è sempre un legame intuitivo, almeno in linea di principio, fra il concetto di stato e ciò che descrive.
Nella meccanica quantistica la relazione non sarà cosi ovvia. Dal momento che la meccanica quantistica è una teoria di campo, è importante esaminare il concetto di stato per un sistema di questo tipo.
In generale, per campo si intende una funzione ψ che associa un numero reale $\psi(\mathbf{x})$ a ogni posizione $\mathbf{x}$ dello spazio tridimensionale, ma, per semplicità, consideriamo il caso in cui ψ è funzione di una sola coordinata reale x.
Nell'esempio della corda unidimensionale che vibra con entrambe le estremità fisse, $\psi(x)$ indica lo spostamento trasversale della parte mobile di ascissa x rispetto all'asse orizzontale di equilibrio.

Configurazione generale di una corda
(una molla di lunghezza L) con entrambe le estremità fisse.
Il vincolo esterno che allontana il sistema dall'equilibrio è
costituito da un qualche tipo di sagoma che viene rimossa al tempo t = 0

L'equazione d'onda classica è una famosa equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine:

[1a] $$\frac{\delta^2\psi(x)}{\delta t^2}(t) = a\,\frac{\delta^2\psi(x)}{\delta x^2}(t)$$

con le condizioni al contorno $\psi(0)(t) = \psi(L)(t) = 0$ che devono valere per ogni t.

La costante a positiva è specifica della corda e ha le dimensioni di una velocità al quadrato, anche se l'onda in istudio è stazionaria. Ciò non deve sorprendere poiché, proprio tramite la costante a nel modo indicato dalla relazione, l'accelerazione della parte mobile della corda con posizione di equilibrio x è ricondotta alle dimensioni della quantità equivalente nello spazio, che rappresenta la variazione della pendenza della corda nel punto (segmento infinitesimo) considerato.
L'equazione d'onda [1a] è l'analogo della equazione del moto della particella singola nella meccanica di Newton usuale. L'equazione descrive in che modo la funzione $\psi(x)$ varia con il tempo, il che spiega la strana notazione $\psi(x)(t)$.
Matematicamente viene trattata anche come una singola funzione $\psi(x, t) = \psi(x)(t)$ delle due variabili x e t.
È evidente che la funzione $\psi(x)$, in una teoria di campo, svolge un ruolo analogo a quello della posizione **x** della particella singola, e l'affinità appare ancora più forte quando si osservi che equazioni del tipo della [1a] garantiscono l'esistenza, a ogni istante t, di una funzione $\psi(x, t)$ della x una volta che siano state assegnate le funzioni $\psi(x, t_0)$ e $\delta\psi(x, t_0)/\delta t$ a un istante fissato t_0.
Ma allora, proprio come nella dinamica di una particella l'ipotesi della causalità veniva verificata scindendo l'equazione differenziale del moto (del secondo ordine nella variabile tempo) nella coppia di equazioni del primo ordine, così in teoria dei campi possiamo identificare ciascun stato di un sistema con una coppia di funzioni $\psi(x)$ e $\Pi(x)$ nella variabile x, e descriverne l'evoluzione mediante una curva, nello spazio degli stati, ottenuta facendo dipendere queste funzioni dal tempo nella forma di derivate prime.

[2a] $$\frac{\delta\psi(x, t)}{\delta t} = \Pi(x, t)$$

[3a] $$\frac{\delta\Pi(x, t)}{\delta t} = a\frac{\delta^2\psi(x, t)}{\delta x^2}$$

Ovviamente, se si sostituisce la [2a] nella [3a] si ottiene l'equazione di campo [1a].
Vi è un'altra possibilità.
Come al solito, il numero di coordinate indipendenti che sono necessarie per descrivere il sistema si chiama "numero di gradi di libertà del sistema".
Finora, noi abbiamo considerato come gradi di libertà del sistema le parti mobili della corda continua, supposte in numero infinito come lo sono i punti di una corda continua, ciascuna specificata da due coordinate (sposta-

mento, velocità). Ora, non dobbiamo dimenticare che, proprio perché la corda è continua, le parti adiacenti sono in stretta relazione fra loro, e non possono essere viste come indipendenti. In realtà il problema presenta un duplice aspetto che affonda le radici nel cuore della meccanica. Se, da un lato, parti interagenti possono essere caratterizzate ad ogni istante in modo indipendente (come prescrive la terza legge del moto, quando l'interazione fra parti sia tale da non offuscare la loro identità, anzi appaia come la manifestazione di una loro proprietà), dall'altro, il mantenimento di un andamento oscillatorio esteso all'intero sistema implica che le diverse parti di esso agiscano in modo concertato, conservando fra di loro relazioni di fase ben definite, senza incoerenze che distruggerebbero la periodicità. Questo secondo aspetto suggerisce l'esistenza di correlazioni, indotte dai vincoli di non equilibrio, fra parti distanti del sistema. Queste correlazioni sono tali da richiedere nozioni sinottiche tradizionalmente proprie della biologia e, tutto sommato, estranee al corso principale della fisica.
Il modo corretto di tener conto di queste osservazioni è di pensare che i diversi gradi di libertà della corda corrispondano ai differenti modi di vibrazione di questa, invece che all'infinito continuo dei suoi punti. Per formulare questa idea in maniera matematicamente precisa, osserviamo che le condizioni al contorno ci permettono di esprimere ciascun campo come una funzione periodica di periodo spaziale pari a 2L, e quindi di esprimere ciascun campo come una serie di Fourier:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{sen} K_n x \quad ; \quad \Pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \operatorname{sen} K_n x$$

dove Q_n sono le ampiezze dei modi e $P_n = \omega_n Q_n$ le ampiezze di velocità. I numeri d'onde $K_n = n\pi/L$ soddisfano le condizioni al contorno, mentre le frequenze ω_n sono connesse con i numeri d'onde per mezzo della relazione di dispersione specifica della corda perfettamente flessibile $\omega/K = \sqrt{a}$.
Assegnare l'insieme infinito dei numeri interi 1, 2, 3... è completamente equivalente ad assegnare la coppia di funzioni $\psi(x)$, $\Pi(x)$.
Possiamo dunque vedere lo spazio degli stati di questa particolare teoria di campo come uno spazio in cui gli stati sono rappresentati da vettori di coordinate $(Q_1, Q_2, \ldots, P_1, P_2, \ldots)$. L'evoluzione del sistema viene descritta facendo dipendere questi vettori di stato dal tempo, cioè:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \operatorname{sen} K_n x \quad ; \quad \Pi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \operatorname{sen} K_n x$$

Ricordando che lo spostamento $q_n(t)$ segue il coseno e quindi la velocità

$p_n(t)$ oscilla in modo sinusoidale, l'equazione di campo [1a] può essere scritta come un sistema di infinite equazioni differenziali lineari del secondo ordine nel tempo:

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + a\,\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,q_n(t) = 0 \qquad ; \qquad n = 1, 2, \ldots$$

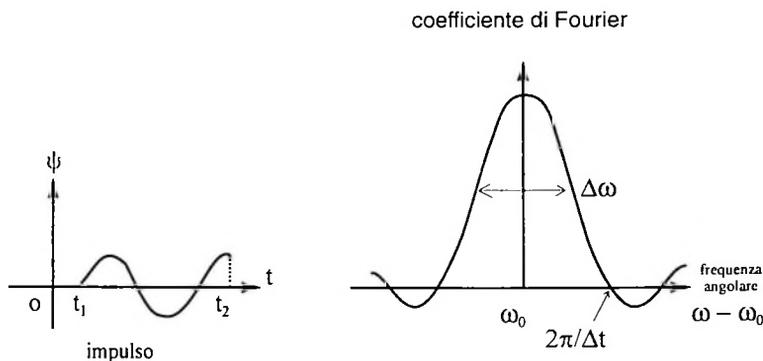
mentre le equazioni del primo ordine [2a] e [3a] possono essere scritte:

$$\frac{d(Q_n \cos\omega_n t)}{dt} = P_n \mathrm{sen}\,\omega_n t$$

$$\frac{d(P_n \mathrm{sen}\,\omega_n t)}{dt} = -\,a\,\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,Q_n \cos\omega_n t$$

Si è così giunti, introducendo un po' di complicazione matematica, al risultato che è possibile esprimere un campo in termini di modi aventi estensione contrassegnati con i numeri di una successione discreta, che sostituiscono, nella descrizione del campo, le particelle newtoniane di ascissa corrispondente ai punti di un continuo.
La teoria che abbiamo discusso illustra bene il dramma della quantomeccanica: quello che si era dimostrato lo strumento principe per la descrizione quantitativa dei fenomeni e su cui si era già consolidata la forma mentis del fisico, la matematica del continuo, dovrà essere faticosamente adattato a descrivere la granularità fondamentale che è alla base della realtà fisica.
Alcuni lettori riconosceranno che sul risultato raggiunto si fonda il ragionamento, spesso svolto, riguardante l'elettrone dell'atomo di idrogeno, con il quale si spiega perché gli stati cui l'elettrone può accedere corrispondono a valori di n che differiscono di una unità. L'elettrone viene trattato quantisticamente come un elemento di campo e quindi rappresentato da un modo di vibrazione che, dovendosi adattare ad una regione anulare, dopo ogni giro deve ritornare su se stesso, per cui la circonferenza sarà un multiplo intero della lunghezza d'onda.
Simile è il ragionamento per una particella confinata in una scatola unidimensionale.
Una particella che si propaghi verrà più opportunamente rappresentata da un impulso, che ha l'unità e l'interezza di un bit d'informazione. Trattando il caso dell'impulso (una curva non periodica che è limitata ad un intervallo di tempo di durata finita), bisogna sempre ricorrere al teorema di Fourier. La novità formale consiste nel fatto che dobbiamo analizzare la curva in termini di frequenze appartenenti ad uno spettro continuo centrato in ω_0, che rappresenta la frequenza media o dominante. Ciò significa che dobbiamo passare dalla somma all'integrale di Fourier. Con il metodo dei vettori

rotanti, abbiamo utilizzato moti armonici di uguale ampiezza e fase zero. Ora seguiremo il procedimento ordinario a partire da un impulso noto della forma di una oscillazione armonica troncata che contiene molti cicli. A rigore, l'oscillazione non è armonica proprio perché dura un tempo finito e la frequenza ω_0 dell'oscillazione deve considerarsi solo la frequenza dominante.

I coefficienti di Fourier che compaiono nell'integrale si ricavano da una funzione, nota come trasformata di Fourier dell'impulso, la quale esprime il valore dell'ampiezza corrispondente a ciascuna frequenza. L'ampiezza varia da un massimo, corrispondente alla frequenza di ascissa ω_0 , allo zero, corrispondente ad una frequenza che differisce da ω_0 di un intervallo in valore assoluto pari a $2\pi/\Delta t$, dove Δt è la durata dell'impulso.

Trasformata di Fourier dell'impulso.
Un grafico dei coefficienti di Fourier in funzione di ω per l'impulso costruito con il metodo dei vettori rotanti presenta, ovviamente, una forma quadra.

Questa analisi ci porta a concludere che i soli contributi di ampiezza apprezzabile, la cui sovrapposizione dà l'impulso in esame, hanno frequenza compresa nell'intorno $\Delta\omega$ di ω_0 dato da $\Delta\omega = 2\pi/\Delta t$.

La relazione $\Delta\omega\, \Delta t = 2\pi$ indica che quanto più breve è l'impulso, maggiore è l'insieme dei contributi necessari per rappresentarlo accuratamente e per dare interferenza di segno distruttivo all'esterno dell'intervallo di tempo che definisce il campo di esistenza dell'impulso.

Se supponiamo di collegare l'energia di un quanto, la quale è una caratteristica dinamica che si può misurare quando la materia assorbe o emette un quanto, con la frequenza, che è una proprietà ondulatoria (il collegamento verrà

effettuato da Einstein per mezzo della costante di Planck), allora è evidente che, in una descrizione quantomeccanica, meglio è precisata l'energia del quanto (più stretta è la banda di frequenze che descrivono l'impulso), più incerto è l'istante in cui il processo avviene.
L'analogo della relazione $\Delta\omega\Delta t = 2\pi$ per le onde nello spazio si ricava facilmente ricordando che la velocità di un impulso (un pacchetto di onde di durata e quindi di lunghezza limitata) è uguale alla velocità dell'ampiezza di modulazione $\omega_{mod}/K_{mod} = \Delta\omega/\Delta K$, chiamata velocità di gruppo.

Un pacchetto di lunghezza Δx, che viaggia alla velocità di gruppo, sorpassa un dato punto fisso x in un intervallo di tempo Δt dato da:

$$\Delta x = \frac{\Delta\omega}{\Delta K}\Delta t$$

$$\Delta K\Delta x = \Delta\omega\,\Delta t = 2\pi\,.$$

Né c'era da aspettarsi un altro risultato, dal momento che l'analisi matematica di Fourier, in cui la variabile ωt fosse sostituita con la variabile Kx, non può distinguere una variabile dall'altra e lascia inalterati i coefficienti.
Se supponiamo di collegare la quantità di moto con il numero d'onde secondo la formula di de Broglie, ne vien fuori una relazione di indeterminazione fra la coppia di osservabili quantità di moto-posizione.
Quando abbiamo utilizzato spazi vettoriali di dimensione infinita per descrivere gli stati di un campo, tale dimensione era posta in relazione con i gradi di libertà del sistema. La dimensione dello spazio degli stati quantistici, invece, non ha nulla a che vedere con i gradi di libertà del sistema nel senso della meccanica classica. Per esempio, lo spazio degli stati che descrive il moto quantistico di una particella singola ha dimensione infinita (la posizione può variare con continuità sull'intera regione occupata dal pacchetto di onde e la quantità di moto può variare sull'intera banda di numeri d'onde fissata dalla relazione di indeterminazione).
Si perde così il legame intuitivo immediato tra il modello matematico e ciò che fisicamente descrive. Ecco perché la meccanica quantistica è tanto difficile da digerire!
Metto in evidenza che l'idea di uno spazio degli stati rimane valida anche in quantomeccanica, e che ciò è necessario per descrivere qualunque genere di proprietà causali. Ma l'ipotesi originaria riguardo agli stati viene indebolita: assegnare il sistema in uno stato permette ora di calcolare solo le probabilità dei risultati che si otterranno dalle misure; e sono queste probabilità che si evolvono in modo causale.
Vecchia ormai di quasi un secolo, la meccanica quantistica ha ampliato pro-

gressivamente il proprio campo di applicazione, dimostrando una capacità di previsione che ha del miracoloso.
Ciò nonostante permane una certa tensione tra la meccanica quantistica e alcuni aspetti della nostra conoscenza pratica riguardo al mondo fisico. L'esempio più stringente di tale tensione è fornito dal paradosso del "gatto di Schrödinger", di cui darò una semplice interpretazione.
La violazione sperimentale della cosiddetta "località di Bell", per quanto sconcertante dal punto di vista classico, verrà assunta come prova a favore della descrizione quantistica dei sistemi fisici contro le teorie locali delle variabili nascoste, che, fra tutte le teorie deterministiche delle variabili nascoste, rappresentano in pratica quelle che hanno un qualche interesse fisico.
A differenza della meccanica classica, la struttura essenzialmente probabilistica della nuova teoria si è ampiamente integrata con il pensiero biologico.

Le domande di Bell
Il paradosso del gatto di Schrödinger

La relazione tra mondo classico e quantistico è un problema profondo e di non facile soluzione. La discussione fra Einstein e Bohr – due tradizioni di pensiero – lo sta a testimoniare lungo un arco di tempo durato quasi trent'anni. Nessuno contesta la validità della teoria dei quanti allo scopo di fare predizioni; il disaccordo interviene quando si cerca di guardare più a fondo e si risale alle questioni di principio. L'opposizione di Einstein alla cosiddetta interpretazione di Copenhagen della meccanica quantistica (in sostanza al concetto di indeterminazione oggettiva) fu granitica. In un'occasione arrivò ad affermare: "La teoria dei quanti ricorda un poco il sistema di illusioni creato da un paranoico eccezionalmente intelligente, mescolato a elementi di pensiero incoerenti".
Perfino Schrödinger finì con l'abiurare sulle questioni di principio, e una volta affermò: "Non mi piace e ho il rammarico di averci avuto qualcosa a che fare". Inserisco, a questo punto, qualche brano dell'articolo di John Bell: "On the impossible Pilot Wave" (CERN TH. Rep. 3315, 1982).
Questo fisico, in età più matura, mostrerà che la descrizione di una coppia di eventi 1 e 2, separati da un intervallo di tipo-spazio, completa dal punto di vista classico, cioè tale da attribuire al concetto di stato nell'ambito microscopico le proprietà di cui gode nell'ambito macroscopico, comporta delle condizioni di indipendenza che consentono di individuare una disuguaglianza, conosciuta come "disuguaglianza di Bell", suscettibile di verifica sperimentale. Dimostrerà poi che le previsioni della quantomeccanica, in buon accordo con certe sperimentazioni finora eseguite, violano tale disuguaglianza. Questo notevole risultato indica che la quantomeccanica non può essere mantenuta, allo scopo di predire i fenomeni, senza accettare un mutamento radicale delle nostre concezioni.

> "Quando ero studente avevo parecchie difficoltà con la meccanica quantistica. Mi fu di conforto trovare che persino Einstein ebbe queste difficoltà per lungo tempo. Addirittura esse lo condussero alla conclusione eretica che alla teoria mancava qualcosa: "Sono, infatti, convinto – diceva – che il carattere essenzialmente statistico della teoria quantistica contemporanea deve essere unicamente attribuito al fatto che questa teoria opera con una descrizione incompleta dei sistemi fisici".
> Einstein non sembrava al corrente del fatto che questa possibilità di coesistenza pacifica fra il carattere statistico delle previsioni quantistiche e una descrizione teorica più com-

> pleta era stata liquidata con grande rigore da J. von Neumann. [A questo proposito] Born scriveva, nel libro *La filosofia naturale della causa e del caso*: "Un contributo più concreto a questo problema è dovuto a J. von Neumann. Egli formula la teoria su basi assiomatiche derivandola da pochi postulati di carattere assai plausibile e generale sulle proprietà dei valori di aspettazione e della loro rappresentazione simbolica. Il risultato è che il formalismo della meccanica quantistica è univocamente determinato da questi assiomi; in particolare nessun parametro nascosto può essere introdotto che possa trasformare la descrizione indeterministica in una deterministica. Perciò se una teoria futura dovesse essere deterministica non potrebbe essere una modificazione di quella attuale, ma dovrebbe essere essenzialmente differente" (...)
> Avendo letto questo misi il problema da parte e mi dedicai a questioni più pratiche. Ma nel 1952 vidi realizzare ciò che era ritenuto impossibile. Fu con i lavori di David Bohm. Egli mostrò esplicitamente come potessero essere effettivamente introdotti dei parametri nella meccanica quantistica non relativistica, in modo tale da trasformare la descrizione indeterministica in una deterministica. Non solo, ma, cosa più importante ancora secondo me, mostrò che poteva essere eliminata la soggettività della versione ortodossa, cioè il riferimento necessario all'osservatore. Per di più l'idea essenziale era la stessa che era stata avanzata da de Broglie nel 1927 nella sua teoria dell'onda pilota.
> Ma perché Born non aveva parlato di quest'onda pilota? Perché von Neumann non l'aveva considerata? Perché l'idea dell'onda pilota è ignorata nei libri di testo? Non dovrebbe forse essere insegnata, non certo come l'unica via possibile, ma come antidoto al conformismo prevalente? Per mostrare che la soggettività, l'indeterminismo, l'incertezza non sono imposte a noi dai fatti sperimentali, ma da una deliberata scelta teorica?"

Einstein, l'abbiamo già incontrato. Sarà il primo fisico a proporre con forza l'idea di quanto, prevedendo che l'energia di un fascio di luce monocromatica si propaghi in pacchetti di valore $h\nu$ (o $\hbar\omega$ dove il simbolo $\hbar$ si legge "h tagliata"). I primi indizi di una struttura granulare della radiazione elettromagnetica furono scoperti da Planck nel 1901, a proposito dello spettro della radiazione di corpo nero. L'equazione di Einstein, che esprime l'energia di un fotone come il prodotto della costante di Planck per la frequenza, risale ad un lavoro del 1905 sull'effetto fotoelettrico. L'idea, all'epoca, incontrò non poche resistenze perché sembrava configurarsi come un ritorno, antistorico, alla posizione atomistica di Newton. In realtà, anche se l'equazione è matematicamente del tutto semplice, il suo significato fisico è strano, perché, se da un lato sembra ignorare il fatto che l'intensità della luce dipende classicamente in modo lineare dal quadrato dell'ampiezza dell'onda, dall'altro attribuisce ad un fotone una tipica proprietà ondulatoria.
Evidentemente, se si varia l'intensità della luce, varia soltanto il numero di fotoni emessi nell'unità di tempo, ma non la loro energia. Dalla fisica classica, sappiamo che un fascio di luce emesso da una sorgente ordinaria è una miscela incoerente di onde che vengono irradiate da moltissimi atomi eccitati, senza un preciso accordo o una relazione di fase ben definita. Se suppo-

niamo che le onde componenti abbiano tutte uguale ampiezza a_0 e che N sia il numero di atomi che irradiano, l'ampiezza dell'onda risultante sarà $\sqrt{N} a_0$ e l'intensità sarà proporzionale a Na_0^2. L'energia si distribuisce nello spazio con una densità proporzionale a Na_0^2, e la densità energetica, tenendo conto della struttura fotonica della luce, potrebbe fornire, integrata su una certa regione, l'energia associata alla frazione di fotoni presente in questa regione. Tale ragionamento può apparire fin troppo semplice, ma la legge di proporzionalità asserita fra densità energetica e quadrato dell'ampiezza dell'onda ha validità generale. Naturalmente, nell'esempio che abbiamo portato del fascio di luce, il quadrato dell'ampiezza dell'onda varia per effetto dell'allargamento del fascio nello spazio. Diventa praticamente costante a grande distanza dalla sorgente, quando non ci si accorge più della curvatura del fronte d'onda. È invece costante nel tempo, se la sorgente viene mantenuta costante per un tempo lungo.

Il ragionamento semiclassico svolto può essere affinato se ci chiediamo che significato assume la grandezza che dipende dal quadrato dell'ampiezza dell'onda, quando il fascio di luce corrisponda in intensità a un solo fotone.

Max Born chiamerà in causa la teoria della probabilità per dare alla quantomeccanica una interpretazione compatibile con la pratica delle osservazioni.

La grandezza che dipende dal quadrato del modulo dell'ampiezza dell'onda $|\psi(x,t)|^2$ in un punto x dello spazio unidimensionale, ad un dato istante t, viene interpretata come una densità di probabilità, che fornisce una effettiva probabilità quando sia moltiplicata per l'intervallo infinitesimo dx che contiene il punto considerato.

Quindi, la probabilità che nell'intervallo dx centrato in x accada qualcosa, per esempio di trovare la particella unitaria, è proporzionale a $|\psi(x,t)|^2 dx$.

Anche se abbiamo introdotto una sola direzione coordinata x ad indicare la direzione di propagazione dell'onda, non si deve dimenticare che l'onda reale avanza su un fronte, cioè si propaga da superficie a superficie, ciascuna definita dall'insieme dei punti con uguale fase. Le onde piane sono problemi unidimensionali, poiché la propagazione avviene lungo una particolare direzione e, nell'istante t fisso, la situazione fisica è la stessa in tutti i punti dei singoli piani perpendicolari alla direzione di propagazione, ciascun piano essendo individuato da un punto x. È immediata la generalizzazione di questo problema allo spazio a tre dimensioni.

L'approccio sicuro per intendere il formalismo introdotto da Born consiste nel trattare le previsioni probabilistiche allo stesso modo delle leggi statistiche nel resto della fisica, cioè come affermazioni su ciò che avverrà, in media, se si ripete un dato esperimento molte volte. Se la sorgente luminosa

è debolissima, tale che venga emesso un solo fotone per volta, ciascun sistema singolo, in un insieme di sistemi preparati in modo simile, sceglierà un cammino evolutivo con l'unica restrizione di dover obbedire ad una legge probabilistica definita. Ma, se la sorgente è ad elevata intensità, tale da consentire l'emissione di un grande numero di fotoni, allora l'energia *media* che può essere osservata in una data regione corrisponde all'energia calcolata in questa regione in base alle idee della fisica classica. Ora però sappiamo che l'espressione classica della densità energetica si riferisce ad un valore medio che si osserverà nel caso di un grandissimo numero di fotoni, ma non descrive la densità energetica associata a un fotone singolo. È probabile trovare la particella in quelle regioni del campo in cui l'ampiezza dell'onda descritta mediante una funzione d'onda $\psi(x, t)$ è grande: questo è il contenuto essenziale dell'idea di Born.
Il moto della particella è governato dall'equazione di Schrödinger, che sostituisce le leggi classiche del moto di Newton. L'equazione è una equazione differenziale del primo ordine nella variabile tempo, sicché l'evoluzione del sistema è del tutto causale e lineare. Ma lo stato di moto della particella è riferito ora ad una funzione d'onda $\psi(x, t)$ e assegnare la particella in uno stato permette solo di calcolare le probabilità dei risultati che si ottengono dalle misure delle osservabili.
Si potrebbe anche dire che l'informazione incorporata nell'equazione di Schrödinger non va oltre le dimensioni di una cella dello spazio delle fasi, costruita utilizzando la relazione di indeterminazione fra posizione e quantità di moto. Il concetto di traiettoria nello spazio degli stati non ha più il significato preciso attribuito dalla meccanica classica.
In sintesi, la teoria descrive lo stato di un sistema singolo *solo* in quanto elemento di una collezione di stati ottenuti da sistemi preparati allo stesso modo, ed è deterministica solo per i valori medi e gli ampi gradi di probabilità. Le probabilità quantistiche sono irriducibili, cioè non sono suscettibili di ulteriori spiegazioni. Ciò significa che bisogna accettare il fatto che nulla può essere mai detto riguardo al comportamento di un sistema singolo. Questa è sicuramente una delle affermazioni più profonde, dal punto di vista ontologico, mai fatte dalla scienza.
J. von Neumann è l'autore di un teorema che deduce a partire da assiomi, cioè da ipotesi, il carattere essenzialmente statistico di ogni previsione teorica. Gli assiomi, presentati come lo fossero a priori, sono in realtà a posteriori e volti a giustificare una teoria, in questo caso quella quantistica, già formalizzata. In altre parole, gli assiomi introducono implicitamente proprio ciò che si vuole dimostrare. Una risposta decisiva in ordine all'annosa con-

troversia sull'interpretazione del formalismo della quantomeccanica, non può essere fornita dalla matematica, e noi ignoreremo, sotto questo aspetto, il contributo di von Neumann.
Lo stesso Einstein, che lesse il lavoro di von Neumann, dichiarò di non averci capito gran che. Di fatto von Neumann non considera per niente l'esperimento ideale proposto da Einstein con Podolsky e Rosen, noto come paradosso EPR. Sarà questo esperimento ideale, reso concretamente eseguibile dal contributo di Bell, ad essere ripetuto più volte, anche di recente, con esiti sfavorevoli ai desideri di Einstein.
L. de Broglie, in modo analogo alla formula per l'energia, collegherà una caratteristica dinamica, la quantità di moto, ad una proprietà ondulatoria, la lunghezza d'onda. In simboli: $p = h/\lambda = \hbar K$.
La relazione, inizialmente studiata per gli elettroni, consente, sorprendentemente, di ipotizzare che anche un oggetto macroscopico, come un tutto unico, possiede proprietà ondulatorie, seppure trascurabili. A prima vista, il concetto stesso di fotone, e ancor più quello di elettrone o addirittura di oggetto macroscopico, è completamente estraneo alla struttura concettuale di un'onda: quello è un'entità discreta e, in un certo senso, indivisibile, questa è un continuo. La contraddizione svanisce se pensiamo la particella come un modo stazionario o un impulso. Modi o impulsi, pur partecipando della natura ondulatoria, cioè pur potendo dar luogo all'interferenza o sovrapposizione tipica delle onde, possono essere caratterizzati individualmente.
Invero, de Broglie avanzerà una teoria nella quale compaiono tanto le onde quanto le particelle. Più precisamente, la lunghezza d'onda non esprime la proprietà ondulatoria di una particella, ma la proprietà di un'onda associata alla particella. L'onda agisce come una sorta di guida, che dirige le particelle verso vari luoghi in proporzione all'intensità dell'onda. Questa interpretazione, adottata quando si voglia mantenere un atteggiamento "realistico" nei confronti dei fenomeni quantistici, non passò. Secondo questo modo di vedere, che non pregiudica la validità operativa della descrizione quantistica, le probabilità non sono irriducibili. La particella ricorda un appassionato di surf oscillante su e giù sulla tavola, spinto di qua e di là dall'azione delle onde lungo una spiaggia. Allora si potrebbero intravedere delle variabili le cui fluttuazioni, nel senso ordinario del termine, decidono le posizioni.
D. Bohm riprende nel 1952, come ricorda Bell, la formulazione suggerita da de Broglie. Si tratta proprio di una descrizione completa del genere di quelle che Einstein avrebbe desiderato.
Noi adotteremo, sulla base del test di Bell e di altri esperimenti, nel complesso chiari e decisivi, l'interpretazione ortodossa della quantomeccanica,

secondo la quale non esistono corpuscoli classici, ma l'onda e la particella sono la stessa cosa. Attribuiremo quindi all'ampiezza dell'onda un significato probabilistico.

L'interpretazione statistica della quantomeccanica costituisce un passo fondamentale per poter dare alla teoria una compatibile interpretazione fisica, permettendo di assumere l'indeterminazione come un punto di partenza davvero concreto. L'idea quantistica di indeterminazione amplia in maniera sostanziale il concetto di stato.

L'esperimento con l'interferometro a doppia fenditura, ritenuto una sorta di *experimentum crucis* capace addirittura, secondo alcuni, di separare la logica della microfisica da quella della macrofisica, è la semplice conseguenza del fatto che la posizione è completamente indefinita sul fronte d'onda perpendicolare alla direzione di propagazione x (e una posizione ben definita è in contrasto con una quantità di moto ben definita lungo la direzione coordinata x, come si ricava dalla relazione di indeterminazione illustrata a proposito del modello ondulatorio del campo).

Già l'esperimento a due fenditure, condotto con una sorgente a intensità debolissima tale che venga emesso un solo fotone alla volta, consente di mettere a fuoco due concetti che costituiscono colonne portanti della struttura quantistica.

In primo luogo, quando due contatori siano collocati in modo da registrare il passaggio dei fotoni attraverso i due fori, talvolta scatta un contatore e talvolta l'altro come nel gioco del lancio della moneta. Ciò indica che particelle unitarie si trasferiscono in maniera aleatoria.

In secondo luogo, quando l'esperimento sia disposto in modo da produrre l'interferenza, non ha senso chiedersi quale foro abbia attraversato la particella. Ciò preclude la via a facili soluzioni deterministiche.

Se un dato esperimento non ha più un esito univocamente determinato, ma può dar luogo a più risultati escludentisi a vicenda o, semplicemente, alla realizzazione di un'alternativa, senza che sia possibile, oggettivamente, prevedere il valore dell'alternativa in ciascun caso particolare di ripetizione di quell'esperimento, allora è chiaro che esiste una certa tensione fra la linearità della legge quantistica del moto e la pratica delle osservazioni.

Nel contesto della quantomeccanica, si è portati a pensare, per un sistema di fronte ad una alternativa, che lo stato quantistico rappresenti uno stato con caratteristiche intermedie tra quelli corrispondenti a una situazione in cui si ottiene un valore definito (vero, falso), con probabilità uno.

In altre parole, lo stato quantistico è una combinazione di stati (allo stesso modo in cui, in uno spazio di dimensione due, un vettore unitario è la

somma dei due vettori ottenuti proiettando il vettore su due assi cartesiani).
Appare ora chiaro perché l'indeterminazione oggettiva amplia il concetto di stato: lo stato è costituito da alternative potenziali con le loro probabilità. Questa conclusione, dall'apparenza filosofica, discende semplicemente dal fatto che la conoscenza del sistema è *intrinsecamente* probabilistica, nel senso che non può essere migliorata raccogliendo ulteriori informazioni sul suo comportamento.

Ritorneremo più avanti su questo formalismo affidato a rappresentazioni vettoriali. Per il momento, ho accennato quanto basta per affrontare un punto cruciale, la cui non chiara comprensione porta ad interpretare l'indeterminazione quantistica come ignoranza da parte dell'osservatore. In quasi tutti i testi viene fatta, in sostanza, la seguente ipotesi: lo stato di un sistema quantistico è rappresentato, nello spazio vettoriale degli stati, da un vettore di lunghezza unitaria la cui evoluzione temporale, se ψ è lo stato del sistema all'istante 0, può essere descritta mediante un operatore lineare $U(t)$, in modo tale che $U(t)\psi$ rappresenta lo stato al tempo t. In altri termini, la funzione d'onda $\psi(x, t)$ nell'istante t generico determina univocamente la funzione d'onda in tutti gli altri istanti, e perciò determina univocamente lo stato di moto della particella.

Questa ipotesi è vera solo quando il sistema in esame è un sistema chiuso, cioè immerso in un ambiente non reattivo. Se esso può interagire con un altro sistema dando luogo alla realizzazione di un'alternativa, allora questa descrizione dell'evoluzione è errata. In queste condizioni, l'evoluzione del sistema microscopico che ci interessa è quella di un sistema aperto e per questo sistema essa implica una scelta ovvero ammette una soluzione non lineare o di tipo stocastico e, quindi, non è deterministica, né simmetrica tra passato e futuro, né reversibile nel tempo.

L'alternativa che viene realizzata, nelle situazioni in cui sappiamo che viene realizzata, cioè controllando il segnale di un rivelatore, è definita. A questo punto l'indeterminazione intrinseca allo stato quantistico si dissolve.

Dall'apparecchio di misura gli aspetti non classici restano così esclusi.

(È bene, per inciso, mettere in guardia il lettore quanto alla precisione assoluta di una tale affermazione sulle proprietà degli strumenti di misura. Se si descrive un sistema reale come un "sistema classico" si fa un'approssimazione, e le relazioni di indeterminazione dicono fin dove ci si può spingere. Supponiamo di voler misurare la posizione di un fotone utilizzando, invece di un contatore dal quale verrebbe "assorbito", uno specchio sospeso nello spazio. Ci si aspetta, pensando di poter evidenziare la quantità di moto acquistata dallo specchio all'atto della riflessione, che il fotone sia rivelato

in una posizione definita. La quantità di moto acquistata dallo specchio dopo il passaggio del fotone è pari alla differenza della quantità di moto del fotone prima e dopo l'urto, cioè, nel caso dell'incidenza normale che implica l'inversione del moto del fotone, è pari al doppio della quantità di moto del fotone. Quindi, all'atto della riflessione, la quantità di moto può essere variata con continuità sull'intera regione ammessa dalla cinematica del processo. Se si riesce a misurare la quantità di moto acquistata dallo specchio dopo il passaggio del fotone con sufficiente precisione, si potrebbe facilmente calcolare, tramite l'adatta relazione di indeterminazione, la piccolissima, su scala macroscopica, imprecisione da cui è affetta la posizione del fotone. Dall'apparecchio di misura gli aspetti non classici, delineati utilizzando idee che si allontanano da quelle classiche, si perdono con probabilità elevatissima nel senso della fisica statistica, sicché gli aspetti quantistici sono d'importanza trascurabile e perciò irrilevanti nel contesto della misura).
Quando non si disponga di uno strumento di misura, non si può dire nulla sul valore dell'alternativa, che rimarrà essenzialmente indecidibile.
Ci si può chiedere che senso abbia parlare di probabilità per lo stato di un sistema singolo. Ma, la teoria quantistica non è una teoria per un sistema singolo, avendo rinunciato alla ricerca (infruttuosa) di variabili capaci di decidere il comportamento di un sistema microscopico singolo. La teoria, e lo ripeto, si riferisce a situazioni fisiche riproducibili e quindi il sistema singolo è visto solo in quanto elemento di un insieme di sistemi preparati allo stesso modo. Mi sembra che la quantomeccanica su questo cammino logico ci porti a procedere e richieda uno sforzo di immaginazione in modo da accettare lo stato di un sistema, così concepito, come una realtà sperimentale.
La differenza fra stato quantistico, costituito in generale da potenzialità, e stato classico, definito, ci sfugge sempre a causa della nostra disposizione inconscia ad ignorare i sistemi elementari da cui hanno origine i processi macroscopici che ci circondano e dei quali abbiamo esperienza. Proprio in questa disposizione in noi radicata si annida il paradosso del "gatto di Schrödinger ".
Il "gatto di Schrödinger" è semplicemente un apparato di amplificazione, come una grossa apparecchiatura dotata di una spia luminosa. La spia, accesa o spenta, è un evento univoco e oggettivo. È fuori discussione che il risultato di una misura per poter servire da fondamento a una teoria scientifica debba possedere queste caratteristiche, ossia non deve dar adito a contraddizioni (*tertium non datur*) e deve essere certificato nelle stesse condizioni da osservatori diversi. Non vedremo mai una spia sospesa tra l'essere accesa e l'essere spenta (non stiamo parlando di alterazioni della percezio-

ne) e tutte le volte che l'apparecchio registra ci sarà nei suoi pressi una particella (quel che veramente importa è che il contatore non scatti anche se nei suoi pressi non c'è alcuna particella, cioè non faccia qualcosa di abbastanza diverso da ciò per cui era stato progettato). Spesso non si capisce che i termini "univoco" e "oggettivo" restano validi in quantomeccanica, pur con un significato indebolito rispetto a quello classico.
In fisica classica, ci si attende non solo che una ripetizione della misura debba fornire nelle stesse condizioni lo stesso risultato, ma anche che una ripetizione dell'esperimento implicante la misura di una quantità osservabile debba fornire nelle stesse condizioni iniziali lo stesso risultato. Ci si attende, cioè, secondo una formulazione che non sia assiomatica, che anche situazioni fisiche simili siano seguite da effetti simili. Abbiamo visto, invece, che per la quantomeccanica situazioni fisiche simili possono essere seguite da effetti grandemente diversi o alternativi.
Se un singolo fotone viene riflesso (da un pezzo di vetro), al gatto non succede niente; se invece viene trasmesso, scatta un dispositivo letale e il gatto muore. Ci si domanda se il gatto non è né morto né vivo fino a che la scatola che lo contiene non venga aperta e lo stato del gatto venga misurato. Quando non si guarda, succede che il sistema gatto più il sistema congegno infernale costituiscano un unico sistema composto 1+2 immerso in un ambiente non reattivo. Allora il sistema complessivo viene descritto come se si evolvesse secondo l'ordinaria equazione di Schrödinger. Così operando, l'indeterminazione confinata al livello microscopico del fotone si manifesta al livello macroscopico, laddove è ragionevole pensare che la descrizione quantistica sia del tutto trascurabile. L'idea che possa esservi uno stato in cui il gatto è una sovrapposizione di gatto vivo e di gatto morto è talmente ridicola da non meritare commenti. Quando si distingua che il sottosistema gatto per poter funzionare da rivelatore classico deve reagire in modo diverso alla verità o falsità di una alternativa, l'evoluzione non è più lineare, ed un osservatore che guardi il gatto è sempre in grado di decidere quale alternativa si è verificata.
Schrödinger non credeva nell'indeterminazione dell'alternativa tra la vita e la morte del gatto, ma giunse a una tale conclusione come una *reductio ad absurdum* per contestare l'esattezza di un'interpretazione troppo letterale della meccanica quantistica.
Il gatto di Schrödinger, quindi, si conferma non come una antinomia (parola di origine greca che significa "contro la legge", "contraddizione"), ma semplicemente per quel che è: una conseguenza "al di là del credibile" della linearità della legge quantistica del moto, un paradosso appunto.

Senza considerare il peculiare formalismo quantistico. l'analogia fra l'intuizione che è alla base della teoria dei quanti e l'impianto metodologico della teoria dell'evoluzione biologica è strettissima. L'organismo vivente funziona, per così dire, come una sonda classica immersa fino al livello molecolare (quantistico). Le perturbazioni che a quel livello compaiono, cioè le mutazioni, vengono amplificate e tradotte infine al livello di funzioni macroscopiche dove opera la selezione, la quale orienta il caso, così come la pratica delle osservazioni si oppone all'indeterminazione contenuta nella legge dell'evoluzione della meccanica quantistica.
Siamo così riusciti a formulare, in termini astratti, la rimarchevole collaborazione fra caso e necessità, familiare alla biologia fin dai tempi di Darwin.
Naturalmente, non sto asserendo che la biologia ha anticipato la fisica sul suo stesso terreno, ipotizzando probabilità oggettive. Nel contesto della biologia evolutiva, con la parola "caso" non ci si riferisce ad un evento posto al di fuori della causalità, ma semplicemente ad un evento, comunque prodotto, singolarmente impredicibile. Oppure ci si riferisce ad una coincidenza fortuita, nel senso che la perturbazione al livello del DNA, comunque prodotta, non ha alcun rapporto con le "necessità" della cellula al momento.
Darwin si limitava a considerare la variazione genetica come una *black box*, ossia una "scatola nera" in cui è riposto un qualcosa di ignoto e dalle vaste potenzialità.
Nella meccanica quantistica, la parola "caso" è sinonimo di probabilità oggettiva, cioè indica un evento che può aver luogo negli interstizi di una trama causale. Se ci si pensa, è abbastanza strano che la teoria quantistica sia formulata in termini di campi, che sono proprio funzioni del punto. Voglio dire che l'idea di un punto nello spaziotempo mi sembra decisamente poco appropriata in quantomeccanica. La costruzione del continuo matematico è un procedimento molto astratto, e non c'è ragione, a priori, per cui tale procedimento debba riflettersi nel mondo dell'esperienza.
Boltzmann, che pure operò in epoca pre-quantistica, dovette intuire chiaramente questa difficoltà. La suddivisione dello spazio delle fasi in "volumi" bidimensionali $\Delta x \Delta p$ spinta ad arbitrio avrebbe portato nei calcoli a valori infiniti, se Boltzmann non avesse introdotto una sorta di taglio in corrispondenza di un qualche intervallo di valore finito (l'entropia è una misura logaritmica del numero delle configurazioni o stati microscopici accessibili ad un sistema costituito, nei casi tipici, da molte particelle. Se supponiamo di dividere infinite volte il campo di variabilità delle osservabili x e p, la definizione di entropia viene estesa al di là del suo comune significato fisico e sfuma).

È chiaro che la quantomeccanica porta a pensare che le semplici idee della geometria, estese all'ambito microscopico, siano errate e che sia necessario un modello dello spaziotempo fisico molto diverso. Nel volerla profondamente radicata nel continuo dei numeri reali, la teoria quantistica, dunque, va incontro ad una incongruenza di fondo. Sull'idea del continuo poggia, invece, la miglior descrizione dello spaziotempo che si conosca, che è quella classica fornita dalla relatività generale. Individuare una così profonda divergenza tra la teoria quantistica e la relatività generale equivale ad asserire che almeno una delle due non è appropriata, dal momento che ambedue aspirano ad una grande universalità e non sarebbero molto interessanti senza di essa. D'altro canto, come sostengono i fisici delle particelle, la relatività generale non perderebbe una pietra della sua corona se risultasse essere solo una teoria macroscopica della gravitazione. (Ricordo che, secondo la relazione di de Broglie, la massa fa parte della natura ondulatoria della particella, sicché il problema del moto non viene formulato in termini di posizione e di velocità, bensì in termini di posizione e di quantità di moto e, negli esperimenti che producono figure di interferenza, giocherà un ruolo importante pure la fase delle particelle che si sommano. In altre parole, la concezione puramente geometrica della gravità, con il suo requisito che la massa scompaia dal problema della traiettoria, non deve essere valida per le particelle elementari. La teoria gravitazionale di Einstein, come quella di Newton, è stata verificata solo per corpi relativamente grandi, che si comportano, evidentemente, in modo classico).
Ho menzionato il problema dello spaziotempo, che ha occupato le menti dei filosofi sin dall'inizio della civiltà, perché è stato ipotizzato che l'apparentemente fondamentale linearità della legge quantistica del moto sia solo una approssimazione di qualcos'altro, e che questa approssimazione mostrerà i suoi limiti proprio nel contesto della ricerca di un collegamento fra quantomeccanica e relatività generale.
Comunque sia, liquidare la probabilità quantistica come un artificio matematico dovuto alla nostra ignoranza della complessa meccanica della causalità, significa ignorare conferme sperimentali molto forti, a cominciare dagli esperimenti di interferenza condotti con sorgenti a intensità debolissima fino ad arrivare alla correlazione della polarizzazione di due fotoni emessi in cascata, esperimento quest'ultimo che viola le condizioni di indipendenza o località e quindi la disuguaglianza di Bell. Queste situazioni non hanno analogie nel mondo classico, né c'è da aspettarsene, dal momento che la struttura concettuale di stato classico è rigida, come paralizzata dal curaro.

Il principio di complementarietà
Le probabilità quantistiche
Il test di Bell

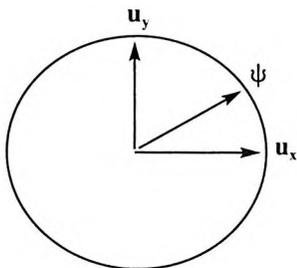
Con l'avvento della teoria dei quanti, la fisica non riesce più a dare un'immagine unitaria di se stessa. Alla base di tutto c'è il fatto che la nuova meccanica fornisce un procedimento estremamente efficace per predire i risultati delle osservazioni sui sistemi microfisici, ma, se ci domandiamo cosa succeda veramente quando un'osservazione ha luogo, quel che otteniamo è enigmatico.
Si ritiene che un tentativo per uscire da tale enigma sia costituito dal cosiddetto principio di complementarietà di Niels Bohr, il quale in realtà fornisce una chiave di lettura eccessivamente filosofica, che ebbe l'effetto di acquietare gli scrupoli dei ricercatori.
Immaginiamo di avviare una doppia serie di tradizionali esperimenti a due fenditure con una sorgente di luce debolissima, tale da consentire l'emissione di un singolo fotone per volta. La distanza fra le fenditure sia confrontabile con la lunghezza d'onda del fotone incidente (diciamo che, se la larghezza della fenditura è dell'ordine di λ, la distanza fra le fenditure presa da centro a centro potrebbe essere intorno a 4λ).

– Prima serie di esperimenti: si osserva la frequenza di conteggio di un contatore posto dietro uno schermo che presenta i due fori, provvedendo a coprire uno dei fori e poi l'altro. Il contatore verrà collocato in posizioni diverse in modo che possa adempiere la funzione di uno schermo rivelatore bersaglio. Quel che si registra è l'arrivo di singoli fotoni unitari che si distribuiscono esattamente come i tiri di un fuciliere su un bersaglio e che provengono necessariamente dall'unico foro aperto, o l'uno o l'altro.
La conclusione che se ne trae è che ogni singolo fotone passa attraverso uno dei due fori.
Il fotone manifesta un comportamento corpuscolare, nel senso che si può affermare che ha attraversato l'uno o l'altro dei fori come nel caso di una particella classica.

– Seconda serie di esperimenti: si osserva la frequenza di conteggio di un contatore, a cui possono giungere i contributi provenienti dai due fori aperti. Si registrano, in funzione della differenza fra le distanze percorse dai due

contributi, picchi di intensità (almeno cinque nelle condizioni sperimentali supposte) che si alternano a intensità nulle, cioè si registra l'interferenza.
La conclusione che se ne trae è che ogni singolo fotone passa in qualche modo simultaneamente attraverso i due fori.
Il fotone manifesta ora un comportamento ondulatorio, almeno fino a quando non interagisca, come tutto unico, con il contatore o atterri sullo schermo rivelatore bersaglio.
I risultati sperimentali non sono contradditori in sé, ciascuno per proprio conto; lo diventano solo se presi come prova dell'esistenza di una proprietà reale che si suppone sussistere indipendentemente da ogni osservazione e la cui esistenza viene dall'osservazione soltanto rivelata. Questa sembra essere una conclusione obbligata, se ammettiamo che la dualità onda-corpuscolo sia rigorosamente stabilita dagli esperimenti riferiti. Per Bohr, la dualità onda-corpuscolo corrisponde a due proprietà complementari rivelate da dispositivi fisici che si escludono a vicenda, dove la semplice presenza dell'uno preclude l'applicazione dell'altro. In altre parole, le proprietà complementari di un oggetto fisico nell'ambito microscopico non sono reali simultaneamente, come avviene in fisica classica. Questa spiegazione, oltre che richiamare direttamente l' "aut-aut" di Kierkegaard, ricorda la filosofia di Kant che sosteneva che gli esseri umani non conoscono le "cose in se stesse", ma solo come oggetti dell'esperienza.
Il principio di complementarietà esprime dunque, per Bohr, una rinuncia a eccessive pretese della conoscenza. Einstein appartiene a una tradizione di pensiero, per così dire, meno rinunciataria, dove non si pongono limitazioni aprioristiche alla ricerca e dove il potere conoscitivo del soggetto della conoscenza può essere oggetto a sua volta di legittima ricerca. Credo che in questo stesse molta parte del conflitto annoso tra Einstein e Bohr.
Il fatto è che la complementarietà trae la sua forza dal terreno della fisica sperimentale ed esce confermata dai recenti sviluppi.
La complementarietà, a mio parere, è collegata con il problema della realizzazione delle alternative potenziali.
Attenendoci semplicemente alle equazioni di campo, secondo le quali la particella ha proprietà ondulatorie (mai corpuscolari), e all'interpretazione probabilistica di Born per conformare l'oggetto quantomeccanico alla nostra esperienza pratica riguardo al mondo fisico, non abbiamo finora incontrato particolari difficoltà o limitazioni almeno dal punto di vista della fisica. Si è dovuto rinunciare solo ad una teoria fantastica per un sistema singolo. Un tale rigetto esprime semplicemente la convinzione, non classica, che le leggi ultime per un sistema singolo hanno un carattere statistico.

Ciò ha richiesto lo sviluppo di una logica in cui non ci si limiti solo ai due valori di verità estremi (vero, falso), ma si consideri concreto anche il caso in cui potrebbe verificarsi l'indecidibilità. Si è trovato, inoltre, che non può esserci coesistenza tra evoluzione lineare di un sistema chiuso, da una parte e, dall'altra, evoluzione non lineare o stocastica di un sistema aperto.
Il problema posto dall'esperimento a doppia fenditura è riconducibile, se ci si pensa, alla manifestazione di questa fondamentale complementarietà. Il fatto stesso di osservare il verificarsi di eventi presuppone che il sistema osservato interagisca con un altro. Se il verificarsi dell'evento ha luogo nelle condizioni date dalla preparazione del sistema per la prima serie di esperimenti, ciò significa che il fotone ha attraversato certamente uno dei fori; se ha luogo nelle condizioni della seconda serie, non si potrà dire che il fotone ha attraversato l'una o l'altra fenditura.
In questo secondo caso, infatti, il contatore non rivela il passaggio del fotone attraverso uno dei fori e, a questo livello, l'evoluzione della funzione d'onda ψ o vettore di stato di Scrhödinger è quella di un sistema in un ambiente non reattivo e per questo sistema essa non implica scelta alcuna.
La complementarietà, anziché esprimere una limitazione delle nostre capacità di conoscere, appare piuttosto come la conseguenza delle condizioni stesse che rendono possibile l'esperimento. In parole povere, essa è nelle cose.
Questo lo si vede bene da un altro esempio, ossia dalle relazioni di indeterminazione incontrate quando abbiamo discusso il modello ondulatorio del fotone. Una relazione di indeterminazione (che abbiamo espresso nella forma limite di una uguaglianza) è in generale una restrizione sulla precisione con cui due osservabili possono essere conosciute simultaneamente e, quindi, rappresenta un caso notevole di complementarietà intrinseca allo stato quantistico. Questo fatto fu capito da Heisenberg.
Stante questo notevole fatto, è evidente che l'uso di argomentazioni probabilistiche è essenziale per dare alla teoria una interpretazione compatibile con le osservazioni, ma non riduce la teoria ad un ramo della fisica statistica. Una relazione di indeterminazione a proposito della legge del moto, nel dominio classico, non può essere neppure formulata.
Vediamo ora come inquadrare le probabilità quantistiche in una struttura matematica appropriata.
Nella particolare teoria di campo costruita portando ad esempio la corda che vibra, le vibrazioni erano polarizzate linearmente secondo una certa direzione perpendicolare all'asse di equilibrio, che ora identifichiamo con l'asse z.
Immaginiamo un fotone polarizzato linearmente secondo una direzione per-

pendicolare all'asse z.
L'immagine potrebbe essere quella di un impulso (un pacchetto d'onde) che si propaga lungo la corda con spostamenti trasversali lungo una medesima direzione, senza alcuna rotazione intorno all'asse di propagazione sicché il momento della polarizzazione è nullo.
Indichiamo lo stato di polarizzazione con il vettore ψ .

$\psi = r_1 \mathbf{u}_x + r_2 \mathbf{u}_y$,

dove $r_1^2 + r_2^2 = 1$

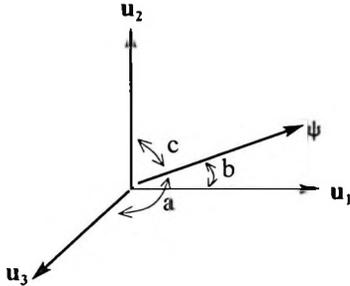
(si noti che ψ è la somma dei due vettori ottenuti proiettando ψ su due assi cartesiani. Su ciò si basa il principio di sovrapposizione)

La direzione di propagazione z è normale al foglio.
La direzione di polarizzazione giace nel piano xy ed è indicata dal vettore unitario ψ (ψ corrisponde allo stato di polarizzazione di un sistema quantistico e, quindi, non ci si deve attendere la solita rappresentazione della polarizzazione lineare mediante una freccia a due punte indicante uno spostamento lungo una linea).
Naturalmente, per simmetria, esistono infinite coppie di vettori unitari mutuamente ortogonali, ottenuti ruotando il sistema di assi coordinati, che potrebbero essere scelte per $\mathbf{u}_x$ e $\mathbf{u}_y$.

Se il fotone polarizzato linearmente incide su un polarizzatore (un foglio o strato di Polaroid) posto nel piano xy con asse di trasmissione facile allineato alla direzione di polarizzazione del fotone incidente, allora il fotone attraversa certamente lo strato, cioè il destino del fotone è determinato (il filtro polarizzatore è supposto ideale).
Il fotone può attraversare lo strato anche quando il polarizzatore abbia l'asse ruotato di un certo angolo θ rispetto alla direzione di polarizzazione del fotone incidente. In questo caso, la descrizione dell'evoluzione non è più deterministica.
I coseni degli angoli formati dal vettore ψ con ciascuno dei vettori ortogonali $\mathbf{u}_x$ e $\mathbf{u}_y$ soddisfano la semplice relazione:
$\cos^2\theta_{\psi,\mathbf{u}_x} + \cos^2\theta_{\psi,\mathbf{u}_y} = 1$.

La quantità geometrica $\cos^2\theta$ è una sorgente di numeri compresi fra 0 e 1, e

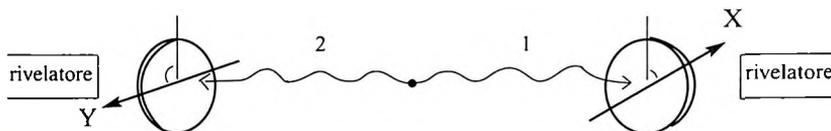
può essere usata come probabilità. Se il fotone polarizzato linearmente incide su un polarizzatore con l'asse ruotato di un angolo θ rispetto allo stato di polarizzazione del fotone e disposto lungo $\mathbf{u}_x$ ($\theta = \theta_{\psi,\mathbf{u}_x}$, con riferimento alla figura), allora il fotone attraversa lo strato con probabilità pari a $\cos^2\theta$.
La legge di Malus, scoperta ben prima della teoria fotonica, prevede, per un fascio di luce di intensità I preparato in modo da essere polarizzato linearmente, che la frazione $I\cos^2\theta$ dell'intensità iniziale del fascio riesca ad attraversare lo strato. Verifichiamo così che la probabilità quantistica corrisponde ad una effettiva percentuale di fotoni, quando siano in gioco molti fotoni simultaneamente.
L'alternativa "il fotone attraversa lo strato" è vera con probabilità pari a $\cos^2\theta$, mentre l'alternativa "il fotone non attraversa lo strato" è vera con probabilità $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. La somma delle probabilità delle due alternative, escludentisi a vicenda, è uguale a 1, in accordo con le convenzioni usuali delle teorie probabilistiche.
I fatti riferiti giustificano l'immagine del fotone, richiamata in precedenza, come un pacchetto d'onde con una ben definita direzione di polarizzazione, il quale attraversa certamente e per intero un filtro polarizzatore ideale con asse allineato allo stato di polarizzazione. Quando si attribuisca all'ampiezza dell'onda un significato probabilistico, l'analogia può essere spinta oltre, giacché la trattazione quantomeccanica è del tutto simile a quella dell'ottica fisica classica. Per $\theta = 45°$ (con θ angolo fra la direzione di polarizzazione e l'asse del polarizzatore), l'onda polarizzata linearmente può essere decomposta in due contributi polarizzati linearmente, di uguale ampiezza, l'uno diretto secondo l'asse del polarizzatore e l'altro perpendicolare rispetto all'asse. In queste condizioni, nel linguaggio della quantomeccanica, dove si lavora con fotoni singoli, lo stato può essere risolto in due stati corrispondenti ad eventi alternativi equiprobabili e l'indeterminazione è tanto grande quanto può essere, cioè del 50%.
In analogia con il modello dei fotoni polarizzati linearmente, gli stati di un sistema quantistico vengono rappresentati come elementi di uno spazio vettoriale, in modo tale che al valore di una alternativa (o ad ogni possibile risultato che si ottiene dalla misura di una data osservabile) corrisponda un particolare vettore **u** del medesimo spazio e che la probabilità di trovare quel risultato, se il sistema è in uno stato rappresentato da un vettore diverso ψ, sia il quadrato del coseno dell'angolo compreso fra i due vettori, o, in modo equivalente, la lunghezza della proiezione del vettore di stato ψ sul vettore **u** elevata al quadrato.
Più o meno questa è la struttura matematica della meccanica quantistica!

L'unica difficoltà è che, mentre nel caso di una alternativa lo spazio vettoriale ha dimensione due, nel caso di un'osservabile continua lo spazio vettoriale ha dimensione infinita.
La relazione trigonometrica data dai coseni quadrati si generalizza a un numero qualunque di dimensioni, esattamente come si generalizza il teorema di Pitagora in uno spazio piatto di N dimensioni.

I vettori mutuamente ortogonali rappresentano i possibili risultati della misura di un'osservabile in uno spazio vettoriale di dimensione tre.
I coseni degli angoli formati dal vettore di stato ψ con ciascuno dei tre vettori ortogonali soddisfano alla regola:
$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$

Naturalmente, quando l'osservabile sia una variabile continua (come la posizione o la quantità di moto), ci si riconduce al caso discreto dividendo arbitrariamente la regione sulla quale è distribuita la variabile di stato in un insieme di intervalli che non si sovrappongono. In questo modo, la probabilità che la variabile di stato abbia un valore assegnato all'interno di un certo intervallo è una quantità dimensionale (è invece zero la probabilità che la variabile cada in un punto preciso).
I vettori di stato che non abbiano la direzione di alcuno dei vettori mutuamente ortogonali $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,...,$\mathbf{u}_n$ corrispondenti ciascuno ad un possibile valore (definito da un intervallo) di una data osservabile, rappresentano uno stato intermedio di incertezza.
Gli insiemi di vettori particolari $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,...$\mathbf{u}_n$ e $\mathbf{u}_1'$, $\mathbf{u}_2'$,...$\mathbf{u}_n'$ relativi a due diverse osservabili costituiranno, in generale, due insiemi differenti di vettori ortogonali. Quindi, se un vettore di stato è deterministico per un'osservabile (cioè coincide con uno dei vettori particolari di questa osservabile), non è detto che lo sia anche per un'altra. Proprio su questo fatto si basa il famoso principio di indeterminazione di Heisenberg, secondo il quale esistono coppie di osservabili complementari, tali che maggiore è la precisione con la quale si misura una di esse, maggiore risulta la diffusione statistica delle misure fatte sull'altra.
Il discorso fin qui abbozzato sulle probabilità quantistiche è comprensibile, in un certo senso e ad eccezione delle relazioni di indeterminazione, anche nel contesto della fisica classica.

Quando non fosse possibile specificare con certezza se il fotone passerà o no attraverso il polarizzatore, l'uso della teoria delle probabilità formalizzata nella fisica statistica rappresenta una maniera pratica di aggirare l'ostacolo dell'indeterminazione. In altre parole, si opera come se lo stato fosse indeterminato, ma non si ammettono in linea di principio situazioni di appartenenza incerta o sfumata.
Se si volesse formulare una teoria con il linguaggio della fisica classica, uno stato ovviamente completo, cioè una determinazione massima del fotone, dovrebbe specificare, presumibilmente, se questo passerà o no attraverso un polarizzatore. Lo stato dovrebbe incorporare l'informazione sufficiente per specificare i valori di verità estremi delle alternative corrispondenti a un qualunque asse (di fatto infiniti) perpendicolare alla direzione di propagazione del fotone.
Nell'ambito di una descrizione del genere, è difficile capire perché di un insieme di fotoni polarizzati linearmente allo stesso modo, che incidono su un polarizzatore ruotato di $\pi/4$ rispetto allo stato di polarizzazione, solo la metà riesca a passare. Difficile ma non impossibile, tuttavia, in quanto si potrebbe immaginare che lo stato possa essere soggetto a cambiamento in un modo che dipende dai particolari del meccanismo di polarizzazione, in pratica dai particolari del meccanismo di funzionamento del Polaroid. Questo cambiamento garantirebbe, volta per volta, la realizzazione dell'alternativa corretta. Un modo di far valere queste idee potrebbe essere quello di far coesistere determinismo e impredicibilità, ipotizzando l'intervento di una qualche variabile a noi ignota che decida l'evoluzione effettiva del fotone e che, quindi, sia necessaria per integrare la descrizione dell'evoluzione dello stato del fotone. Le teorie locali delle variabili nascoste propongono, in sostanza, idee del genere, appunto allo scopo di ottenere l'accordo con i dati sperimentali nell'ambito della concezione deterministica. La difesa dell'esistenza di una variabile nascosta, ad opera di creazionisti scientifici (molto attivi in campo biologico), non è sempre priva di malizia, ma si dovrà capire infine che "la natura – come scrive Einstein – è sottile ma non maliziosa".
Queste convinzioni verranno ora sottoposte a critica secondo il test di Bell.
È indispensabile una breve premessa per approfondire le innovazioni concettuali della meccanica quantistica. Quando si rappresenti lo stato quantistico di un sistema mediante un vettore che corrisponde ad una posizione intermedia di incertezza e si ritenga che il procedimento di sovrapposizione utilizzato conduca ad uno stato dotato dell'informazione massimale consentita, diventa plausibile estendere idee simili agli stati di due sistemi fisici

1+2 che formano un sistema composto. Ci riferiamo a un sistema in cui l'interazione che tiene insieme le parti è tale da non pregiudicare la loro identità individuale. Come già ricordato, discutendo la terza legge del moto di Newton, se due sistemi interagiscono, l'evoluzione di ciascuno dipende anche dall'altro, ma ad ogni istante fissato gli stati dei due sistemi possono essere caratterizzati indipendentemente. Un sistema così composto, in accordo con il senso comune e con la concezione della fisica classica (a cui attiene il criterio di realismo EPR), potrebbe essere caratterizzato a un istante t dicendo: "Il sistema 1 è nello stato u_t e il sistema 2 nello stato v_t". È implicito in questa affermazione che lo stato di ciascun sistema, tenendo conto delle interazioni in atto, abbia la proprietà *reale* che il risultato di ogni singola misurazione è esattamente prevedibile.
Il punto è che le innovazioni introdotte dalla meccanica quantistica consentono di rappresentare, in uno spazio vettoriale, lo stato di un sistema composto mediante un vettore unitario che corrisponde ad una situazione in cui nessuno dei due sistemi componenti si trova in uno stato definito. In effetti, per la meccanica quantistica un sistema composto può trovarsi in uno stato *mescolato*, in cui le alternative potenziali di 1 e 2 sono strettamente intrecciate. Il mescolamento degli stati, nel contesto della fisica classica, dove gli stati sono completi, è semplicemente un'idea assurda.
Nel caso di due sistemi che si evolvono raggiungendo una separazione spaziale e interagiscono ciascuno con un apparato, la fisica classica, quando il destino di ciascun sistema fosse determinato dallo stato unitamente ad alcuni aspetti locali dell'apparato sperimentale, non potrebbe far altro che interpretare gli eventi che si realizzano, da una parte e dall'altra, proprio come indipendenti. La nozione di eventi indipendenti è qui assicurata dal termine "locale". Il termine "locale" significa, con riferimento ad esperimenti sulla polarizzazione di due fotoni, che la variabile che contribuisce a determinare il destino evolutivo del primo fotone non dipende in alcun modo dall'orientamento dell'altro polarizzatore, né dal fatto che si verifichi o no il passaggio del secondo fotone attraverso quel polarizzatore, dato che i due fotoni, emessi in cascata dallo stesso atomo, hanno raggiunto i relativi polarizzatori a grande distanza l'uno dall'altro, ivi provocando eventi separati da un intervallo di tipo-spazio. In sostanza, le condizioni di indipendenza sono sinonimo di località e vengono anche indicate con il termine di "località di Bell".
Tenendo conto dell'ipotesi cruciale della località di Bell, consideriamo una classe di sistemi il cui prototipo è quello del ragionamento (o paradosso) EPR. Ciascuno di tali sistemi è composto di due parti 1 e 2, ben separate spazialmente. La parte 1 interagisce con un apparato che ha il parametro

regolabile X, e dà due possibili risultati ovvero offre a considerare un'alternativa indicata come vera o falsa. La parte 2 interagisce con un apparato che ha il parametro regolabile Y, e anche qui si presenta un' alternativa.
Il sistema desiderato sia costituito da una coppia di fotoni emessi in cascata dalla diseccitazione di un atomo di calcio.

Successioni di fotoni 1 e 2 emessi dalla sorgente raggiungono i polarizzatori aventi gli assi X e Y regolabili. Le posizioni degli assi possono essere specificate dagli angoli x e y che ciascun asse forma rispetto a una direzione fissata nel piano del polarizzatore, diciamo quella verticale. Il rivelatore è un dispositivo ottico munito di tubi fotomoltiplicatori che ha il solo scopo di registrare l'arrivo del fotone.

Nella situazione sperimentale considerata è praticamente impossibile controllare la scelta degli stati completi di 1 e 2. Secondo il metodo di impostazione classico, viene fatta una media sullo spazio di questi stati. Tale operazione di media corrisponde a porsi nella condizione in cui non si sanno precisare le informazioni che gli stati incorporano, di modo che i risultati sono formulati in termini di probabilità. Allora, una teoria locale delle variabili nascoste assegnerà all'alternativa "il fotone 1 attraversa lo strato 1" una probabilità definita $p^1(x)$ quando la variabile x abbia un certo valore e, in modo analogo, assegnerà all'alternativa "il fotone 2 attraversa lo strato 2" la probabilità $p^2(y)$ quando la variabile y abbia un certo valore. Questi dati corrispondono alla percentuale di fotoni che, nel contesto sperimentale specificato, si trovano in uno stato che possiede l'informazione (opportunamente integrata dalle variabili nascoste) di attraversare con certezza il polarizzatore.
La probabilità di passaggi coincidenti è data dal prodotto $p^1(x)$ $p^2(y)$ delle probabilità dei risultati considerati indipendenti, in accordo con la definizione usuale di probabilità composta.
Non è certamente difficile, calcolando le probabilità in questo modo e in relazione a due possibili valori di x e di y, individuare una relazione che, come può essere verificato con l'algebra elementare, abbia il valore di una disuguaglianza. Per esempio:

$$-1 \leq p^1(x)\,p^2(y) + p^1(x)\,p^2(y') + p^1(x')\,p^2(y) - p^1(x')\,p^2(y') - p^1(x) - p^2(y) \leq 0$$

Vediamo ora cosa mostra l'evidenza sperimentale, alla quale ci si deve sempre attenere.

Quando i due polarizzatori hanno l'asse orientato lungo una stessa direzione in modo da filtrare lo stesso stato di polarizzazione lineare, tra i due fotoni esiste la seguente correlazione: posto che il fotone 1 passi, allora il fotone 2 attraversa il relativo polarizzatore. Siamo dunque nella situazione in cui la realizzazione di un'alternativa per il fotone 1 ci consente di prevedere con certezza il valore dell'alternativa per il fotone 2, senza in alcun modo disturbare tale fotone (dal momento che il rendimento quantico attuale di un tubo fotomoltiplicatore non è del 100%, cioè talvolta il contatore non registra quando invece dovrebbe farlo, il termine "certezza" andrebbe più opportunamente sostituito con il termine "sicurezza").

La correlazione suddetta tra i due fotoni viene osservata anche se i due polarizzatori vengono concordemente ruotati e orientati lungo una nuova direzione comune.

Nel formalismo quantistico dello stato mescolato, ciò significa che quando si applichi una procedura per realizzare le alternative a disposizione dei fotoni 1 e 2, la probabilità che risultino ambedue vere è $1/2$, e così pure la probabilità che risultino ambedue false; è invece nulla la probabilità che una risulti vera e l'altra falsa.

Inoltre, variando l'orientamento del polarizzatore 2 rispetto a quello del polarizzatore 1, cioè ruotando l'asse Y di un angolo θ rispetto all'asse X, la teoria quantistica prevede, e la pratica lo conferma, che se il fotone 1 passa, allora il fotone 2 attraversa il relativo polarizzatore con una probabilità pari a $\cos^2\theta$.

La probabilità quantistica del passaggio o del fotone 1 o del fotone 2 attraverso i rispettivi polarizzatori, comunque orientati, è uguale a $1/2$ (questo risultato è riprodotto dalla fisica classica mediante un'operazione di media sull'insieme degli stati). Ma, la probabilità quantistica di rivelazioni coincidenti è data da $\frac{1}{2}\cos^2(Y - X)$, e ciò porta alla violazione della disuguaglianza di Bell (operando per gli angoli x, x', y, y' le scelte 45°, 0°, 22,5°, 67,5°, otteniamo 0,2071, che contrasta con il limite destro della disuguaglianza).

Per capirlo, il lettore dovrebbe semplicemente vedere che, a fronte del gruppo di fotoni 1 che passano attraverso il polarizzatore 1 e che costituiscono la metà del totale dei fotoni che giungono a quel polarizzatore, quando si vari l'orientamento del polarizzatore 2 di un angolo θ rispetto al polarizzatore 1, solo una frazione $\cos^2\theta$ del gruppo di fotoni 2, che passavano attraverso il polarizzatore 2 quando $\theta = 0$, ora passa, mentre la restante frazione $\mathrm{sen}^2\theta$

non passa. Applicando sempre la legge di Malus, a fronte del gruppo di fotoni 1 che non passano attraverso il polarizzatore 1, una frazione $\cos^2\theta$ (con θ angolo fra i due polarizzatori) del gruppo di fotoni 2, che giungono al polarizzatore 2 e non passavano quando $\theta = 0$, ora non passa, mentre una frazione $\text{sen}^2\theta$ passa. Il conteggio dei fotoni che passano resta sempre la metà del totale, ma le rivelazioni coincidenti sono pari a $\frac{1}{2}\cos^2\theta$. Così la natura, ancora una volta, riesce a cavarsela.
Non esiste, e lo ripeto, alcuna teoria locale delle variabili nascoste che possa riprodurre, mediante un'operazione di media sullo spazio degli stati, le probabilità della meccanica quantistica, che sono in accordo con il comportamento della natura.
Otteniamo così il notevole risultato, forse tra i più profondi della fisica, che le realizzazioni delle alternative di sistemi ben spazialmente separati, che una semplice interpretazione considererebbe indipendenti, sono invece correlate per la meccanica dei quanti.
Dunque, l'interpretazione classica che ci ha portato a stabilire condizioni di indipendenza fra le parti di un sistema composto deve essere rivista.
Evitando di entrare in conflitto con la relatività ristretta, la quale vieta un collegamento causale fra eventi separati da un intervallo di tipo-spazio (conflitto, peraltro, che ben difficilmente potrebbe spiegare la correlazione nei termini in cui la conosciamo), l'idea di una variabile locale tale da garantire l'evoluzione deterministica dei sistemi nell'ambito della microfisica riceve una secca smentita e il concetto di stato completo ne esce ridimensionato.
Lo stato di un fotone dovrebbe portare con sé il messaggio di attraversare o no con certezza il polarizzatore orientato lungo varie (di fatto infinite) direzioni.
La somma delle parti esaurisce le proprietà del tutto. Una possibilità che non dovesse risultare, dall'esame separato delle parti, già codificata in esse, è esclusa.
La meccanica quantistica, invece, non ammette stati del fotone dotati di un tale messaggio. Nella descrizione quantistica, lo stato di un fotone può contenere l'istruzione di attraversare o no con certezza un polarizzatore orientato lungo una sola direzione.
È evidente che lo stato quantistico, che assumiamo come quello che corrisponde alla reale determinazione massimale di uno stato fisico, non è uno stato completo e che l'idea di completezza è solo una immaginazione della fisica classica. Infatti, lo stato quantistico non potrà mai attribuire a ciascun fotone un numero di eventi definiti pari a quanti ne ammette uno stato completo.
Questa scoperta, apparentemente foriera di limitazioni, amplia il concetto di totalità. Una tale affermazione sarebbe davvero sconcertante se il tutto fosse

qualcosa di più di un compendio delle proprietà delle singole parti: diviene invece accettabile quando si capisca che le parti si influenzano reciprocamente in un modo da farci ammettere che il tutto non è la semplice somma delle parti componibile nel modo che più piaccia.
Ciò può essere interpretato come la rottura di una simmetria.
Questa intuizione abbraccia tutti gli uomini; la sua evidenza è tanto vasta e fondamentale che il suo nome è inutile.
Nel formalismo quantistico, il sistema composto 1+2 può, ad un certo istante, trovarsi in uno stato mescolato. Quando il sistema si trova nello stato mescolato, le parti componenti si trovano in uno stato indeterminato, ma tra le indeterminazioni esiste una correlazione. Il mescolamento ha come conseguenza, se le parti 1 e 2 sono ben separate nello spazio, una sorta di non località, e la realizzazione correlata delle alternative di 1 e 2 appare come un processo non locale.
Dunque, la correlazione empirica della polarizzazione di due fotoni emessi in cascata è la semplice conseguenza del mescolamento degli stati operato dalla teoria dei quanti.
Influenze reciproche tra parti separate da un intervallo di tipo-spazio (cioè da una distanza spaziale e da un tempo inferiore a quello che la luce impiega a percorrere tale distanza) coesistono pacificamente con la relatività ristretta, quando si ammetta che in queste influenze reciproche non è possibile distinguere qual è la causa e qual è l'effetto.
Questa correlazione, che certamente non ha analogie nel mondo classico, getta luce sull'affermazione che "il tutto non è la semplice somma delle parti", bensì un intreccio di relazioni ben più complesso di quanto possa emergere dallo schema formale della teoria classica.
La crisi aperta dalla rivoluzione quantistica ha suscitato reazioni che vanno dal bizzarro al mistico. Ne citerò una per tutte. Leggo a pag. 31 di *Dieu et la science* di Jean Guitton, membro dell' Académie Française, allievo prediletto del Bergson e consigliere spirituale del presidente Mitterand: "La fisica quantistica ci dice [...] che lo spazio e il tempo sono delle illusioni. Che una singola particella può essere rivelata in due luoghi simultaneamente. Che la realtà fondamentale non è conoscibile". Forse è superfluo commentare che queste metafisiche sono disperazioni apparenti, ma consolazioni segrete.
Attenzione, invece, merita un esame critico delle schematizzazioni necessarie per poter effettuare un confronto fra previsioni quantistiche e disuguaglianza di Bell. La schematizzazione più forzata si basa sull'assunto che la sensibilità (o rendimento) dei tubi fotomoltiplicatori, rispetto alla radiazione monocromatica, sia prossima al 100%. In questo modo, ogni fotone che

entra in un rivelatore genera con certezza un segnale macroscopico. In realtà, i rivelatori attuali sono lontani da una tale sensibilità e quindi non tutte le coppie di fotoni che si dividono e interagiscono con il rispettivo apparato vengono scoperte.
Questo fatto, taciuto da quasi tutti i testi, introduce aspetti che non si sanno osservare e fa nascere l'obiezione che ciò potrebbe minare la significatività del contrasto empirico fra meccanica quantistica e località di Bell. Questa obiezione è condivisibile sotto l'ipotesi che le condizioni di indipendenza siano valide in natura. Ma, sotto l'ipotesi di segno opposto, i risultati sperimentali confermano al di là forse delle stesse aspettative le previsioni quantistiche. Non resta, ai sostenitori delle teorie locali a variabili nascoste, che avanzare il sospetto che i dati delle sperimentazioni possano riflettere le preferenze dei ricercatori e, quindi, essere il frutto di una selezione ideologica. Se così fosse, bisognerà aspettare probabilmente mezzo secolo, o giù di lì, finché rivelatori efficienti renderanno giustizia, eliminando la presenza, deprecabile in campo scientifico, di ogni residuo di ideologia (un'altra possibilità potrebbe essere quella di escogitare esperimenti simili con particelle più facili da osservare).
Per ora, esaminiamo i seguenti fatti. Gli esperimenti tradizionali a doppia fenditura, appartenenti a una grande famiglia di esperimenti che offrono a considerare osservabili dicotome o alternative, convincono, secondo ogni evidenza, della natura ondulatoria del fotone. Non ci sono prove che una figura di interferenza cambi forma quando l'intensità della luce tenda allo zero. In queste condizioni è ragionevole pensare che attraverso le fenditure sia in transito un singolo fotone alla volta e quindi che un singolo fotone possa interferire con sé stesso. Ammessa la natura ondulatoria delle particelle e l'unità del quanto d'azione, cioè della costante di Planck (la costante di Planck è unica e un fotone di energia $\hbar\omega$, dove ω è la frequenza del fotone quasi-monocromatico, non può essere diviso nel senso che si può rivelare, con un contatore, una "parte di fotone" che trasporti solo una certa frazione dell'energia del fotone iniziale e ne conservi la frequenza), una descrizione fondata sulle relazioni di indeterminazione appare inevitabile. Ciò significa che la quantomeccanica opera con una descrizione dei sistemi incompleta secondo la concezione classica, ma corrispondente alla determinazione massimale consentita.
A questo punto è possibile, forse inevitabile, andare oltre ed accettare l'incompatibilità della fisica, su scala microscopica, con il criterio di realismo e la località del ragionamento EPR.

L'idea basilare della meccanica quantistica, cioè che il tutto non è la semplice somma delle parti, è la conferma, ottenuta in modo spettacolare nell'ambito della fisica atomica, di intuizioni familiari alla biologia da lungo tempo.
È impossibile capire il comportamento di individui che interagiscono all'interno di un gruppo senza principi strutturali di nuovo tipo, che non si possono ricavare dal comportamento individuale. Ampliando l'area cui le diverse discipline via via fanno riferimento, sarà proprio l'introduzione di questi nuovi principi a caratterizzarle in modo peculiare, impedendo alla fisica di considerare la chimica e la biologia come semplici propaggini del suo discorso intorno all'universo.
Ciò era perfettamente chiaro a un maestro della fisica quale Erwin Schrödinger, che così scrisse in un suo aureo libretto: "... l'idea di un fisico ingenuo relativamente agli organismi, cioè l'idea che può sorgere nella mente di un fisico, il quale, dopo aver imparato la sua fisica..., incominci a pensare al problema della vita e al come gli organismi si comportano e funzionano, chiedendo a se stesso, in coscienza, se egli, con ciò che ha imparato della sua umile scienza relativamente semplice e chiara, non possa portare un qualche apprezzabile contributo al problema." (*What is Life?*).
Azzardo qualche commento ancora e una conclusione.
La teoria dei quanti ha fatto svanire il sogno di poter controllare, secondo un rigore deterministico, l'evoluzione dei sistemi. È dunque molto opportuno che la fisica fondata su quel sogno ritorni all' Olimpo dal quale fu rubata, perché solo gli dei possono disporre di quell'informazione che è al di là delle capacità umane. Al suo posto dobbiamo erigere teorie compatibili con le nostre possibilità, evitando di seppellire la realtà sotto un cumulo di procedimenti matematici assoluti. Tali procedimenti, concepiti come fossero sciolti dall'ambito empirico nel quale sono nati, possono fuorviarci e talvolta portare così lontano che nessuno potrebbe più scorgere nell'evoluzione che essi tracciano una qualche corrispondenza con i lineamenti della realtà.
In un tale abbaglio era caduta la fisica classica, e da questa esperienza era uscito vivo Schrödinger volgendosi alla biologia.
In biologia, questa consapevolezza è di vitale importanza.
La natura ha una fantasia molto più sviluppata della nostra e svicola subito dal percorso indicato dalle lunghe catene di ragionamento deduttivo della

matematica. Una fluttuazione di piccola ampiezza può assumere una funzione dominante. Un piccolo fenomeno può accumularsi e infine dar luogo ad un punto di svolta, all'irruzione del nuovo. Lo stesso calcolo delle probabilità, quando il numero delle vie evolutive accessibili ad un organismo è fantasticamente alto, perde di significato. Di più, l'applicazione di vincoli di non equilibrio può provocare in sistemi aperti fenomeni di auto-organizzazione e la formazione di strutture, violando apparentemente il secondo principio della termodinamica.
Se i teorici si avvicineranno alla natura con modestia, riconoscendo passo dopo passo la necessità di un bagno rigeneratore alle fonti empiriche, il campo scientifico rimarrà prospero e in buona salute. Ma, se ci lasciamo ammaliare dalla tendenza ad una matematizzazione idiota, allora ci troveremo nei guai.
Tutti coloro che hanno deplorato la barriera, innalzata sui fondamenti della meccanica di Newton, fra il mondo della fisica, rigidamente strutturato, e il mondo della vita, dove la collaborazione del caso non è riducibile allo zero e l'evoluzione non percorre mai lo stesso cammino due volte, possono trovare conforto da quanto emerge dai nuovi fondamenti della meccanica quantistica. Troveranno che qui si riafferma l'antico significato del termine "Fisica".

Indice

Il libro offre un panorama della fisica di base.
La fisica è la più superba delle scienze, perché pretende di avere a che fare con tutta la realtà. Il fisico può ammettere la propria ignoranza riguardo a un particolare sistema – la struttura dendritica di un fiocco di neve, un'eruzione vulcanica, un organismo vivente – ma non concederà mai che questo si trovi, in linea di principio, al di fuori della legalità della fisica.
Questo pensiero forte ha sempre provocato nei cultori delle discipline biologiche reazioni contrastanti, talvolta di palese rigetto. Giacché emergono in biologia, con evidenza nel ramo evolutivo, fenomeni che non vìolano alcuna delle leggi della fisica, ma che tali leggi non sono più in grado di controllare.
Scopo della presente opera è quello di tentare un innesto della biologia in una teoria fisica confacente. Ciò che viene in luce, attraverso un'analisi della fisica, condotta in varie direzioni, è l'esistenza di una frontiera alla quale la descrizione classica cessa di essere appropriata e prendono il sopravvento aspetti curiosi della materia. Questa frontiera è stabilita dalla teoria dei quanti. L'autore è convinto che la teoria dei quanti possa adempiere, nei confronti della biologia, la funzione di una teoria fondante senza, al tempo stesso, lederne l'autonomia.

Dario Vaccari è nato a Venezia il 10 agosto del 1948. Dopo studi di filosofia presso l'università di Lovanio e di sociologia all'università di Trento, approda a Padova, dove si laurea in medicina. Dal 1978 è specializzato in reumatologia, parte della clinica che affonda le radici nella biologia del connettivo e nell'immunologia. Dopo aver imparato la sua medicina, seguendo un iter opposto a quello di Schroedinger, al quale l'autore nella presente opera fa costante riferimento, incomincerà a pensare al mondo della fisica secondo il modo di vedere e di capire propri del mondo della biologia, chiedendo se non sia possibile portare un qualche contributo alla riaffermazione di quell'unità del sapere che i due mondi, posti separati e a contrasto fra loro, hanno lacerato.

Lire 20.000 (iva inclusa)

ISBN 88-86870-39-6